UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

A APRENDIZAGEM DE PERÍMETROS E ÁREAS COM GEOGEBRA: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Cláudia Luísa de Matos Lopes

Dissertação

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de especialização em Didática da Matemática

2013

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

A APRENDIZAGEM DE PERÍMETROS E ÁREAS COM GEOGEBRA: UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

Cláudia Luísa de Matos Lopes

Dissertação orientada pelo Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de especialização em Didática da Matemática

2013

Resumo

A presente investigação tem como objetivo perceber de que modo os alunos desenvolvem os conceitos de área e perímetro e que dificuldades experienciam, tendo por base uma unidade de ensino com uma abordagem de cunho exploratório, recorrendo a um ambiente de geometria dinâmica – o *Geogebra*. O quadro teórico evidencia as dificuldades dos alunos na aprendizagem destes conceitos, considera as razões que estão na sua origem e possíveis estratégias para levar os alunos a ultrapassá-las, já que muitos alunos do ensino básico confundem perímetro e área e, muitas vezes, se limitam a decorar as fórmulas. Assume-se que os alunos desenvolvem melhor a sua compreensão de perímetro e área quando trabalham em simultâneo os dois conceitos, realizam atividades de caráter prático e/ou usando ferramentas informáticas, e usam ferramentas de medição apropriadas. Este estudo segue uma metodologia qualitativa e interpretativa, com observação participante. A recolha de dados foi efetuada numa turma de 5.º ano, cuja professora é a investigadora, sendo estudada a própria turma e, de modo mais aprofundado, dois alunos estudo de caso. Na recolha de dados foram utilizados a observação de aulas, com registos em diário de bordo, entrevistas e análise documental.

Os resultados indicam que os alunos melhoraram a sua compreensão do conceito de perímetro e do modo como este se determina, mas ainda não compreendem a fórmula do perímetro do círculo e cometem alguns erros. Também melhoraram a sua compreensão de área e o seu desempenho no cálculo da área do retângulo e na determinação da área de figuras preenchidas com quadrículas, mas apresentaram dificuldades na determinação da área do triângulo e do círculo, cometendo vários erros. No que respeita à indicação das unidades de medida, alguns alunos ainda confundem as unidades de comprimento com unidades de área, mas melhoraram bastante o seu desempenho no que respeita à distinção entre área e perímetro, reconhecendo a equivalência de figuras planas. O trabalho simultâneo dos dois conceitos, com o recurso a ferramentas informáticas e outras atividades exploratórias, em detrimento da memorização de fórmulas sem compreensão, permitiu aos alunos deste estudo ultrapassarem algumas das suas dificuldades e distinguirem com maior clareza os conceitos de perímetro e área.

Palavras-chave: Perímetro, Área, Distinção entre área e perímetro, Geogebra, Dificuldades dos alunos.

Abstract

This research aims to understand how students develop the concepts of area and perimeter and their difficulties, based on a teaching unit following an exploratory approach, using a dynamic geometry environment – Geogebra. The theoretical framework underlines the students' difficulties in the learning about perimeter and area, considering the reasons behind their origin and possible strategies that may lead students to overcome them, as many elementary school students confuse the concepts of perimeter and area and often memorize formulas without understanding. It is assumed that students develop a better understanding of perimeter and area when they work simultaneously the two concepts, carry out practical activities and/or use computer tools, and use appropriate measurement tools. The methodology used is qualitative and interpretative using participant observation. Data collection is carried out in a grade 5 class which teacher is the researcher. The class itself was object of study as well as two students who were object of case studies. Data was collected using classroom observation, with researcher`s records in a logbook, interviews and document analysis.

The results show that students improved their understanding of the concept of perimeter and how this is determined but still do not understand the formula for the perimeter of the circle and make some mistakes. The students also improved their understanding of area. They could determine the area of the rectangle and of figures filled with squares, but had difficulties in determining the area of the triangle and the circle and made several mistakes. As regards the indication of units of measurement, some students still confuse the units of length with units of area, but vastly improved their performance with regard to the distinction between area and perimeter, recognizing the equivalence of plane figures. Simultaneous work of two concepts with the use of computer tools and other exploration activities at the expense of memorizing formulas without understanding, allowed students of this study to overcome some of their difficulties and to distinguish more clearly the concepts of perimeter and area.

Keywords: Perimeter, Area, Distinction between area and perimeter, Geogebra, Students' difficulties.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor João Pedro da Ponte, pela forma como me acompanhou e orientou na realização deste trabalho, quer pelas suas sugestões e críticas pertinentes, quer pela sua constante disponibilidade, incentivo, encorajamento e exigência, assim como os seus ensinamentos.

Aos colegas do ano curricular, em especial ao Hugo, Sara, Glória, Sílvia, Natália e Susana, companheiros deste percurso, pelo apoio e momentos inesquecíveis de trabalho e amizade.

À direção e aos restantes colegas da escola onde se realizou este estudo, pela disponibilidade e apoio dado, facilitando e tornando possível a realização deste projeto.

Aos alunos que participaram nesta investigação, em especial à "Mariana" e ao "João", pela disponibilidade que manifestaram, pela forma como entusiasticamente colaboraram, e, particularmente, pelo tempo que investiram nas entrevistas. Sem eles não teria sido possível concretizar este estudo.

Aos meus familiares e amigos, a todos aqueles que direta ou indiretamente estiveram a meu lado e contribuíram para a realização deste trabalho, pelo apoio, carinho, palavras de incentivo e ânimo nos momentos mais difíceis e pela compreensão nos momentos de ausência.

Aos meus pais, Jorge e Elvira, pois sem eles nada disto tinha sido possível. O seu constante apoio, incentivo, motivação, carinho, persistência, pressão, proteção, amparo e amor foi fundamental que eu conseguisse iniciar e concluir esta importante etapa da minha vida.

A todos o meu muito obrigado…

Índice Geral

Índice de Anexos

Índice de Quadros

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo apresento as razões que motivaram o presente estudo sobre a aprendizagem de perímetros e áreas com o *GeoGebra* pelos alunos do 2.º ciclo do Ensino Básico, no quadro de uma experiência de ensino, bem como o problema e as questões que me proponho estudar.

1.1. Motivação do estudo

Para este trabalho tive interesse em relacionar a tecnologia com o ensino da Matemática, pelo que concebi uma sequência de tarefas dum tema da geometria – perímetros e áreas – que envolvem o recurso ao software de geometria dinâmica *GeoGebra* e propus a sua resolução por uma turma do 5.º ano do 2.º ciclo do Ensino Básico.

1.1.1. Ambientes de geometria dinâmica (AGD)

A criação de contextos favoráveis à aprendizagem é uma característica dos ambientes de geometria dinâmica, software que permite construir e manipular figuras geométricas no ecrã do computador (Coelho & Saraiva, 2002). Os ambientes de geometria dinâmica são de fácil integração nas práticas profissionais dos professores e articulam-se com relativa facilidade com as orientações programáticas e curriculares dos vários níveis de ensino, podendo ter um papel importante no desenvolvimento da competência geométrica pelos alunos.

De acordo com Laborde et al. (2006), o contributo da tecnologia no ensino e aprendizagem da geometria está fortemente ligado à manipulação dinâmica e interativa de representações gráficas. Nos últimos trinta anos, a investigação tem sido dedicada a dois tipos de tecnologia associada às representações gráficas, sendo uma delas os ambientes de geometria dinâmica (AGD - com vários graus de interatividade e manipulação direta). Os primeiros AGD apareceram nos anos oitenta, sendo objetivo principal fornecer uma família de diagramas que representassem um conjunto de objetos e relações geométricas em vez de um único diagrama estático.

Nos AGD, os diagramas resultam de sequências de primitivas expressas em termos geométricos escolhidos pelo utilizador. Quando um elemento como um gráfico é alterado com o rato, o gráfico altera-se mas as relações geométricas mantêm-se. Estas realidades artificiais podem ser comparadas a entidades do mundo real. É como se esses gráficos reagissem às manipulações do utilizador seguindo as leis da geometria, assim como os objetos materiais reagem às leis da física. Uma característica fundamental destas realidades é a sua quase independência do utilizador, assim que são criadas. Quando o utilizador altera um elemento do diagrama, este é modificado de acordo com a geometria da sua construção, sem considerar a vontade do utilizador, o que não acontece nos diagramas construídos com papel e lápis, que podem ser ligeiramente distorcidos pelos alunos, no sentido de satisfazerem as suas expectativas. Além disso, os AGD oferecem características específicas como macro construções, traçados e lugares geométricos, que diferem das ferramentas do papel e lápis. Os digramas de computador também são objetos externos cujo comportamento e feedback requer interpretação por parte dos alunos (Laborde et al., 2006).

No que diz respeito ao processo de justificar e provar, dentro dos argumentos a favor da utilização dos ambientes de geometria dinâmica para este fim, a necessidade de usar métodos explícitos de construção baseados em propriedades teóricas pode levar a considera-los bons ambientes para a introdução de provas ou demonstrações formais. Os estudos geralmente concluem que a medição não é restrita a argumentos empíricos, sendo também usada em argumentos dedutivos. Enquanto a demonstração é considerada um meio de decidir acerca da veracidade das afirmações, torna-se um meio de explicar um fenómeno extraordinário ou surpreendente, observado no ecrã do computador (Laborde et al., 2006). Assim, a integração dos AGD no ensino permite conceber atividades com o objetivo de introduzir e promover o raciocínio dedutivo e a demonstração.

Os ambientes de geometria dinâmica são considerados como facilitadores da aprendizagem, na medida em que requerem ações dos alunos para atingir um objetivo e durante o processo os alunos aprendem através da reflexão e coordenação das suas interações. Alguns investigadores também salientam que a escolha das tarefas a usar num ambiente de geometria dinâmico é fundamental para o desenvolvimento da compreensão dos alunos. Uma combinação de ferramentas relevantes, disponíveis para o aluno, com situações problemáticas é geralmente considerada um bom meio para o surgimento de novo conhecimento. O papel da tecnologia nos processos de resolução dos alunos para as tarefas é múltiplo, sendo que as ferramentas disponíveis no ambiente tecnológico permitem aos alunos encontrar estratégias que não eram possíveis num ambiente de papel e lápis. O significado da tarefa é fornecido pelo ambiente, pois este ambiente dá feedback das ações do utilizador, quando, por exemplo, os alunos verificam as suas construções através da sua manipulação ou verificam as suas conjeturas usando várias ferramentas, tais como, medir e construir. O feedback pode ser usado para criar a necessidade de procurar outra solução ou evidenciar uma solução inadequada ou incorreta.

1.1.2. O *GeoGebra*

O *GeoGebra* é um software de geometria dinâmica de livre acesso e gratuito. Foi criado por Markus Hohenwarter em 2001, para a sua tese de doutoramento na universidade de Salzburgo, Áustria. É um programa concebido para combinar geometria, álgebra e cálculo, áreas de exploração matemática que outros softwares tratam separadamente, num único ambiente dinâmico de livre e fácil acesso (figura 1).

O surgimento do Geogebra como um recurso de educação matemática cada vez mais popular é devido às suas características chave: (i) versatilidade (por exemplo, representações geométricas e algébricas), (ii) acesso livre, fácil e gratuito, traduzido em várias línguas, e (iii) interatividade via on-line e através de fóruns, onde se podem trocar comentários e recursos. Um rápido aumento no número e localização de visitantes do seu sítio da internet (figura 2) é indicativo da tendência generalizada do interesse internacional do uso deste software na educação matemática (Hohenwarter et al., 2009).

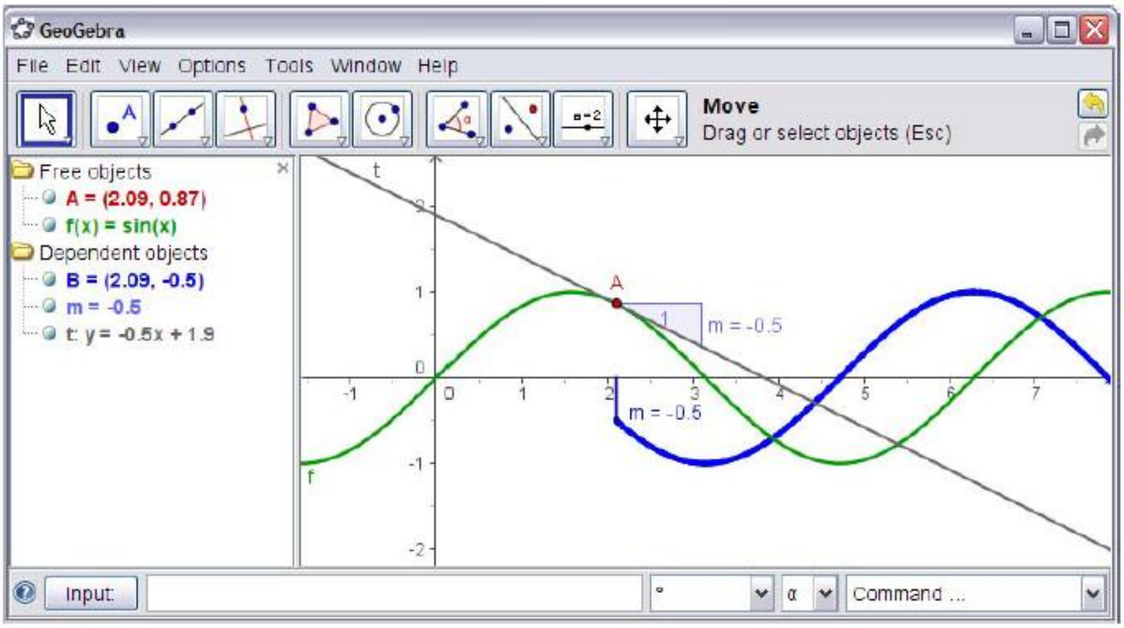


Figura 1. Combinação das representações algébricas e gráficas no Geogebra.

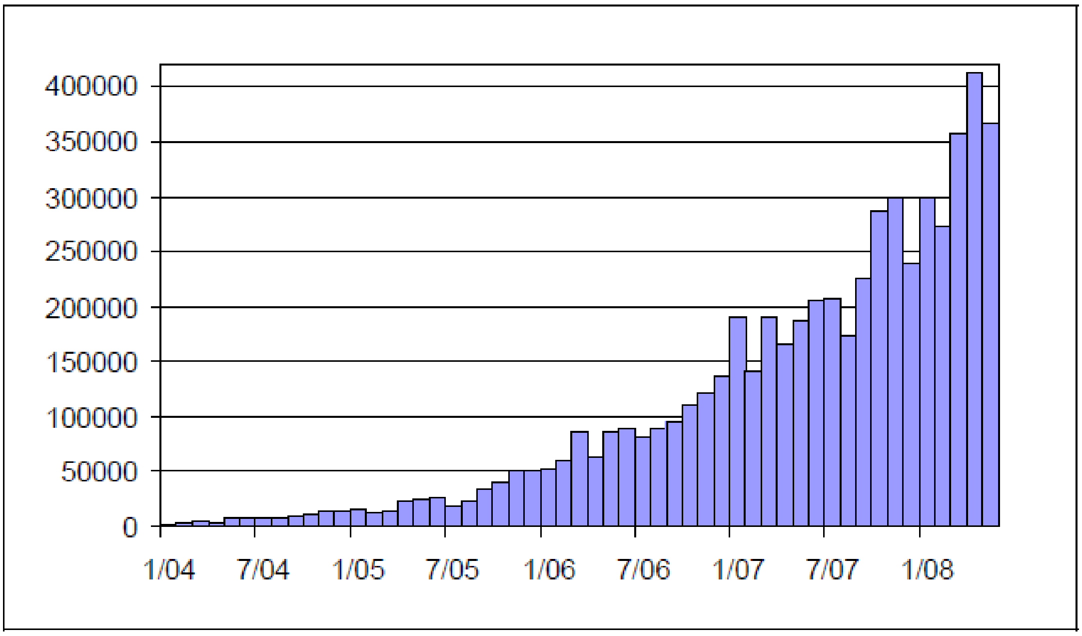


Figura 2. Visitantes do website do Geogebra por mês no período de 2004-08

O sítio da internet oficial do Geogebra está em www.geogebra.org, onde se pode fazer o download da versão mais recente do software e ter acesso ao fórum e *GeoGebraWiki*, com outras publicações e informação dos Institutos GeoGebra regionais. Depois do software ter sido publicado na internet em 2002, vários professores contactaram Hohenwarter para partilharem o seu entusiasmo no uso do Geogebra nas suas salas de aula. O feedback positivo dos professores foi, depois, confirmado com vários prémios de softwares educativos, incluindo o prestigiado *European Academic Software Award* em 2002. Howenwarter continuou a desenvolver o Geogebra nos seus estudos, examinando as aplicações pedagógicas deste recurso nas escolas austríacas e desde 2002 é convidado pelas associações de professores para dar conferências e workshops em *GeoGebra* na Europa e América do Norte. Os investigadores começaram, também, a usar o Geogebra nos seus estudos, artigos e outras publicações com suplementos com Geogebra (Hohenwarter et al., 2009). Para conseguirem auxiliar e chegar a todos os professores, oferecendo desenvolvimento profissional, e assegurar e coordenar a investigação relacionada com o Geogebra, Hohenwarter e a sua equipa criaram uma organização, de seu nome *International GeoGebra Institute* (IGI), em 2008, marcando assim o crescimento significativo deste software e da sua comunidade internacional.

Um programa informático de Matemática como o Geogebra é uma ferramenta que auxilia os indivíduos na sua atividade matemática mas que também pode ser usado para transmitir significado matemático e construir ferramentas matemáticas, podendo ser descrito como um “meio matemático” (Andresen & Misfeldt, 2010). Nos sistemas de geometria dinâmica como o Geogebra, cada gráfico criado respeita a teoria matemática, caso seja construído corretamente, o que significa que relaciona o que é observável com a interpretação teórica do gráfico muito mais facilmente do que um gráfico feito em papel. Mas o Geogebra tem outras vantagens, como permitir exportar figuras para um processador de texto, criar pequenos applets que estimulam a transmissão e recuperação de conhecimento matemático e possui uma ferramenta auxiliar de construção, que vai indicando os vários passos da construção, favorecendo o processo e podendo ser útil para os alunos, por exemplo, como trabalho de casa. Os professores conseguem criar facilmente ilustrações dinâmicas de fenómenos matemáticos e situações problemáticas para trabalhar na sala de aula, que podem ser partilhadas com outros professores e os alunos também podem criar os seus applets acerca dos assuntos que estiverem a trabalhar nas aulas, podendo expressar-se e não apenas adquirir conhecimento (Andresen & Misfeldt, 2010).

Os materiais manipulativos são artefactos concretos ou simbólicos com os quais os alunos podem interagir enquanto aprendem novos tópicos matemáticos. São bons auxiliares de aprendizagem porque permitem a exploração concreta e ativa de conceitos abstratos, mas a investigação tem mostrado que os materiais manipulativos informáticos são ainda mais eficazes do que aqueles que envolvem materiais concretos, uma vez que permitem interligar de modo dinâmico várias representações ao mesmo tempo (Velichová, 2011). O ambiente dinâmico do Geogebra permite aos seus utilizadores criar objetos matemáticos dinâmicos, como gráficos e funções, e interagir com esses objetos. Assumindo que esses objetos matemáticos são reais na plataforma, apesar da plataforma ser virtual, a interação é dinâmica e contínua entre o objeto e o utilizador.

O Geogebra é uma aplicação de controlo intuitivo adequada a todo o tipo de utilizadores, sem requerer formação informática, onde é possível desenvolver materiais pedagógicos de várias formas, estilos e para todos os níveis de ensino. O seu download é gratuito a partir do website, requerendo unicamente uma plataforma java para ficar operacional. A sua manipulação é de aprendizagem fácil e intuitiva. Os ficheiros criados podem ser guardados em formato "ggb" ou como páginas de internet e permitem a importação de imagens ou outros ficheiros. A barra de ferramentas permite criar vários tipos de objetos enquanto surgem as instruções de construção em qualquer das 45 línguas disponíveis, sem requerer qualquer tradução e podendo ser partilhado gratuitamente por todo o mundo.

O simples ato de desenhar objetos matemáticos e figuras não é suficiente para a construção de conceitos matemáticos básicos com compreensão, mas atividades criativas dinâmicas são essenciais para o desenvolvimento do conhecimento de cariz tecnológico, o que parece ser consistente com a ideia de compreensão matemática, como também a competência para usar várias representações de conceitos matemáticos ilustrados de modo dinâmico. O Geogebra parece ser uma ferramenta didática que corrobora este esforço de modo fácil, natural e amigável. Estas características potenciam o mais possível o seu uso no ensino, aprendizagem e exploração matemática, considerando os seus benefícios e grau de satisfação de todos os grupos de utilizadores, incluindo professores e alunos (Velichová, 2011).

Considerando a abrangência das tecnologias atualmente ao dispor na sala de aula e especialmente concebidas para o ensino da geometria e, visto que pretendo investigar o trabalho dos alunos em geometria, faz todo o sentido recorrer ao software de geometria dinâmica GeoGebra, dadas as suas potencialidades para a aprendizagem dos alunos e a falta de investigação e de publicações relativas à sua utilização com os assuntos matemáticos propostos (perímetros e áreas). Evidenciando o meu interesse no Geogebra, frequentei uma ação de formação relacionada com a sua utilização em sala de aula e a minha experiência com o seu uso noutros assuntos matemáticos também se revelou benéfica para a aprendizagem e motivação dos alunos.

1.1.3. A escolha dos tópicos perímetros e áreas

Segundo os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (2007), os programas de ensino desde o pré-escolar ao 12.º ano devem contribuir para que todos os alunos compreendam os atributos mensuráveis dos objetos e das unidades e apliquem técnicas, ferramentas e fórmulas adequadas para determinadas medidas. Deste modo, os alunos deverão ampliar, ao longo da sua escolaridade, o conjunto de atributos mensuráveis (grandezas), bem como aprofundar o conhecimento das relações entre os diversos atributos. Deverão ainda compreender que são necessárias unidades distintas para medir atributos mensuráveis diferentes e aprender a selecionar a unidade adequada para cada grandeza (ME, 2007).

Em relação às técnicas, ferramentas e fórmulas adequadas para determinar medidas, os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (2007) referem que as estratégias usadas na determinação de uma medida deverão passar pelas técnicas de medição, como a contagem, a realização de estimativas e a utilização de fórmulas e instrumentos. A mesma fonte também menciona que muitos alunos do ensino básico têm dificuldades na compreensão dos conceitos de perímetro e área, daí a escolha destes tópicos do programa para desenvolver no trabalho com os alunos. Muitas vezes, os alunos decoram as fórmulas sem as compreender e confundem frequentemente perímetro com área. Enquanto professora considero muito importante conhecer a origem dessas dificuldades e perceber melhor como elaboram os alunos os seus raciocínios, ao resolverem tarefas que envolvem estes conceitos. Trabalhar este tema recorrendo ao Geogebra poderá ser uma mais-valia para a aprendizagem dos alunos e auxiliar o seu raciocínio, bem como as suas representações, a fim de permitir que desenvolvam a compreensão destes conceitos geométricos.

Proponho-me realizar uma experiência de ensino para ajudar os alunos a compreenderem os conceitos de perímetro e área a partir dos tópicos do programa do 2.º ciclo, "Perímetros – Polígonos regulares e irregulares e círculo" e "Áreas – Equivalência de figuras planas, unidades de área e área do triângulo e do círculo", inseridos no tema da geometria. Provavelmente muitos professores, tal como eu, sentirão dificuldade em gerir o tempo atribuído ao estudo destes tópicos e em diversificar as suas práticas de sala de aula para proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem apelativas e significativas, para que os alunos possam compreender os conceitos envolvidos e não se limitem a aprender e decorar fórmulas. De acordo com o NCTM (2007) muitos alunos do ensino básico têm dificuldades na compreensão do perímetro e da área e frequentemente utilizam fórmulas do perímetro e área de retângulos sem compreenderem de que modo essas fórmulas se relacionam com a grandeza a ser medida ou com a unidade de medida usada (Kenney & Kouba, 1997; Lindquist & Kouba, 1989). Neste sentido, os professores deverão ajudar os alunos a visualizar as relações entre as fórmulas e a figura real. É neste contexto que procuro perceber que potencialidades e eventuais problemas se colocam no ensino dos perímetros e áreas, através de uma abordagem que enfatiza a aprendizagem com compreensão, propondo a realização de tarefas de natureza problemática, exploratória e investigativa com o uso do computador, nomeadamente o programa Geogebra. Com este estudo ainda espero contribuir para o meu desenvolvimento profissional, bem como para um melhor conhecimento da problemática do ensino aprendizagem destes tópicos da geometria por parte da comunidade escolar.

1.2. Problema e questões do estudo

Considerando as dificuldades dos alunos e a minha experiência como professora do 2.º ciclo procurarei perceber de que modo o trabalho com perímetros e áreas, recorrendo ao Geogebra, pode contribuir para a compreensão das noções de perímetro e de área em alunos do 5.º ano. O estudo tem por base a realização de uma unidade de ensino dos tópicos perímetros e áreas. Assim, é objetivo tentar compreender de que modo os alunos desenvolvem os conceitos de área e perímetro, num percurso de aprendizagem com compreensão, para perceber que dificuldades experienciam e em que tarefas, os êxitos conseguidos e os caminhos percorridos.

Para responder ao problema enunciado considero as seguintes questões:

1. De que modo os alunos desenvolvem a noção de perímetro com recurso ao GeoGebra e que dificuldades apresentam no trabalho com perímetros?
2. De que modo os alunos desenvolvem a noção de área com recurso ao GeoGebra e que dificuldades apresentam no trabalho com áreas?
3. Que dificuldades apresentam os alunos na distinção de perímetro e área?

Capítulo 2

Perímetro e Área

O presente estudo dá particular atenção ao desenvolvimento dos conceitos de área e perímetro pelos alunos, considerando as suas dificuldades em compreender e distinguir estes conceitos. Assim, neste capítulo abordo diversos trabalhos sobre os temas essenciais para o desenvolvimento deste estudo: (i) os erros e dificuldades dos alunos associados ao perímetro e área; (ii) a origem dos erros dos alunos; e (iii) as propostas de vários autores para que os alunos ultrapassem os seus erros e dificuldades.

2.1. Erros e dificuldades dos alunos associados ao perímetro e à área

Erros e dificuldades relacionadas com a medição do comprimento e perímetro

Segundo Battista (2007) a investigação verificou que muitos alunos, talvez a maioria, possuem uma desconexão básica entre o raciocínio espacial e o raciocínio baseado em medidas numéricas, isto é, muitos alunos não estabelecem adequadamente a ligação entre as medidas numéricas e o processo de repetição das unidades de medida. Por exemplo, os alunos que medem incorretamente o comprimento de um objeto quando uma das suas extremidades não está alinhada com o “zero” numa régua não conceptualizam claramente como as marcas numéricas da régua indicam a repetição das unidades de comprimento. A consequência dessa falta de ligação evidencia-se em diversos estudos. Por exemplo, para Outhred e Mitchelmore (2000), os erros de muitas crianças na medição de linhas ou lados de retângulos sugerem uma compreensão puramente instrumental da medição de comprimentos. Eles parecem seguir o procedimento mecânico de colocar a régua algures na linha e ler o número marcado na extremidade direita da mesma. Parece que não percebem que colocando a marca do zero no início da linha, o número lido corresponde ao número de espaços com 1 cm que cabem nessa linha. Nunes, Light e Mason (1993) também identificaram erros de medição, nomeadamente a "leitura cega" da régua que consiste em ler o número na régua que corresponde ao fim da linha.

De acordo com Clements et al. (1997) os alunos têm dificuldade em lidar com quantidades medidas com unidades diferentes, subestimam as distâncias, em particular distâncias longas, têm dificuldade em compreender a compensação para unidades com metade do tamanho e subestimam a relação inversa entre o tamanho da unidade e o número de unidades. Os alunos foram observados a esticar os intervalos entre as marcas que fizeram para medir um segmento de reta, para satisfazer uma noção conjeturada de comprimento de um segmento. Por exemplo, os alunos costumam desenhar segmentos e marcá-los enquanto contam mas mudam a escala à medida que se aproximam do fim do segmento, de modo que a contagem final das marcas esteja de acordo com o comprimento do segmento de reta conjeturado. Os alunos que usam este procedimento tendem a não estabelecer nem manter relações entre os números, as medidas e os pontos que desenham para indicar o comprimento dos segmentos e a forma e tamanho das figuras geométricas. Quando desenham pontos nas figuras tendem a não manter o comprimento dos intervalos entre os pontos ou quando mantêm, mudam a escala com os intervalos entre os pontos a diminuírem até ao fim da linha do último segmento. Os alunos do estudo piloto de Clements et al. (1997) também foram observados a marcar pontos para dois lados da figura que estavam a desenhar e a marcar o mesmo comprimento para esses lados apesar da diferença notória no comprimento dos dois lados e das discrepâncias nas distâncias entre os pontos marcados nesses lados. Os alunos têm a tendência de ir diminuindo o comprimento de segmentos quando desenham as linhas sucessivamente para desenhar figuras. Além disso, não estabelecem relações entre a forma das figuras e o comprimento dos lados, por exemplo desenham retângulos e colocam como comprimento dos lados: 30 cm, 40 cm, 60 cm e 70 cm. Era mais comum os alunos operarem com números do que com representações espaciais das figuras geométricas criadas ou com representações numérico-espaciais integradas. Os seus comportamentos indicam que, numa tarefa de construir certas figuras geométricas, a sua intenção não era fazer sentido dos números como medidas de comprimento, mas sim usar procedimentos tendo em vista descobrir números que somados perfizessem o valor pretendido. Assim, determinavam as medidas com as quais realizavam cálculos aritméticos sem estabelecerem outras relações entre as medidas e a forma espacial.

Barrett e Clements (2003) referem que estudos sobre o conceito de comprimento sugerem que as crianças têm dificuldades em identificar a unidade em objetos cujo comprimento estão a quantificar e atribuem valores inexatos a comprimentos dados. No estudo destes autores houve alunos que cometeram erros na contagem das marcas que fizeram nas figuras, contando duas marcas para as duas extremidades de um único segmento.

Confusão entre área e perímetro

Numerosas investigações indicam que o conceito de área é propenso a equívocos, é difícil de ensinar e não é claro para os alunos até em anos de escolaridade mais avançados (Nunes et al., 1994). O erro mais comum documentado na literatura diz respeito à relação entre área e perímetro.

Nunes, Light e Mason (1993) referem que foi difícil para os alunos, em tarefas do cálculo da área, desenvolver procedimentos para além de cobrir superfícies e contar os "tijolos". Alguns alunos adicionaram o comprimento e a largura para obter a área de figuras. Este é um erro comum nas soluções das crianças para problemas de área, quando lhes é facultada a medida dos lados. Kidman e Cooper (1997) também indicam que a perceção de que a área é a soma das dimensões do retângulo é comum no 4.º, 6.º e 8.º ano. Aparentemente, cerca de metade dos alunos usa uma "regra de integração aditiva", isto é, soma o comprimento dos lados da figura para calcular a área. A regra aditiva persiste quando uma peça semicircular é removida de uma superfície retangular mas isto não acontece quando a peça removida é retangular.

Kidman (1999) refere que os alunos confundem frequentemente área com perímetro e tendem a usar abordagens aditivas para calcular áreas, quando as estratégias multiplicativas seriam as adequadas. No estudo de Chappell e Thompson (1999) os alunos revelaram dificuldades ao nível da representação visual e, portanto, tiveram dificuldades em construir uma figura com 24 cm de perímetro, já que construíram figuras com 24 unidades quadradas de área ou figuras contendo grelhas que mostravam as 24 unidades quadradas, ou seja, confundiram área e perímetro. Também Sherman e Randolph (2004), analisando os resultados de um pré-teste, verificaram que muitos alunos confundiam, com frequência, a sua compreensão da área e perímetro. Alguns alunos não souberem identificar qual era a parte de uma figura correspondente à área e qual era a correspondente ao perímetro.

Os alunos do estudo de Cavanagh (2008) também confundiram área com perímetro. A evidência dessa confusão advém da etiquetagem inapropriada das unidades de medida, quer nas respostas do teste, quer nas entrevistas. Para indicar o comprimento dos lados usaram "cm^2" e para indicar a medida da área usaram "cm". Os alunos não compreenderam que as medidas convencionais de comprimento são medidas lineares e que as medidas de área são quadradas.

De acordo com Battista (2007), há vários estudos que indicam que os alunos têm dificuldade em relacionar e separar devidamente os conceitos de comprimento, área e volume. O mesmo acontece com futuros professores e professores em serviço. Por exemplo, futuros professores acreditam que quando o perímetro de uma figura aumenta, a área também aumenta (Ma, 1999; Tierney, Boyd e Davis, 1990). Alunos e professores também acreditam, frequentemente, que se os comprimentos dos lados de um quadrado ou arestas de um cubo duplicarem também duplicam a área e volume, respetivamente (por exemplo, Tierney, Boyd e Davis, 1990). Quase todas as crianças do estudo de Kordaki e Potari (1998) acreditaram que a razão entre áreas era a mesma que a razão entre as suas correspondentes dimensões.

Erros relacionados com o conceito e medição da área

Sistematizando os resultados de investigações anteriores, Owens e Outthred (2006) indicam que os alunos manifestam reduzida compreensão das unidades de área e das suas características espaciais. Estes autores referem, nomeadamente, que em diversos estudos alguns futuros professores primários (i) encaravam a área apenas como comprimento vezes largura (Tierney, Boyd & Davis, 1990); (ii) usavam a fórmula da área do retângulo para determinar a área de outras figuras planas que não retângulos (Tierney, Boyd & Davis, 1990); (iii) usavam a fórmula com unidades de comprimento em vez de unidades de área (Tierney, Boyd & Davis, 1990); (iv) não estabeleciam a conexão entre o sentido visual da área como quantidade de superfície com o conceito abstrato de multiplicação; e (v) focavam-se em duas quantidades, o número de retângulos ao longo do comprimento e da largura sem reconstituir estas quantidades como o número de retângulos numa linha e o número de linhas.

No estudo de Sherman e Randolph (2004), muitos alunos conseguiam recitar fórmulas, particularmente para encontrar a medida de área, mas foram incapazes de explicar por que é que as fórmulas funcionavam. Também Battista (2007) indica que a maioria dos alunos que usam corretamente as fórmulas da área do retângulo ou do volume de um prisma retangular em problemas com contexto estandardizado não percebem porque é que as fórmulas resultam e não as aplicam corretamente noutros contextos. Tierney, Boyd e Davis (1990) também se referem à dependência das fórmulas memorizadas por parte de futuros professores. Como indicam Outhred e Mitchelmore (2000), "quando os alunos não compreendem a base conceptual para a fórmula, têm dificuldade em generalizar os procedimentos que aprenderam" (p. 145).

A investigação também mostra que a maioria dos alunos tem dificuldade em compreender como a multiplicação de unidades de comprimento resulta em unidades de área (Battista, 2004; Kordaki & Potari, 1998, 2002; Nunes, Light & Mason, 1993). No estudo de Kordaki e Potari (1998) a maioria das crianças não conseguiu relacionar as unidades de área com as unidades de comprimento ou não conseguiu avaliar o tamanho de uma área retangular com dimensões conhecidas. As crianças deram significado a unidades de medida de comprimento comparando-as com comprimentos que lhes eram familiares, como neste exemplo "1 m é o comprimento desta mesa e um pouco menor" (Kordaki & Potari, 1998, p. 309). As crianças pareceram aplicar unidades de comprimento do sistema métrico para medir apenas uma dimensão do retângulo para descrever uma área. Esta abordagem é, provavelmente, influenciada pelo facto das áreas medidas na escola serem, usualmente, retângulos, cuja medida de área é definida pela multiplicação das suas dimensões. Ainda neste estudo, apesar das crianças definirem o metro quadrado como a área de um quadrado cujos lados têm 1 m, a maior parte não conseguiu ver nenhuma relação entre o metro quadrado e a área estudada.

Kordaki e Potari (2002) estudaram alunos que, ao transformar e comparar áreas usando ferramentas de computador que auxiliavam a medição de áreas com unidades espaciais, deixaram falhas ou sobreposições e tiveram dificuldades em contar as unidades necessárias para cobrir a área das formas da tarefa ou, mesmo contando o número correto de unidades, tiveram dificuldade em estimar as partes das unidades necessárias para cobrir as partes que sobravam numa figura, ou consideraram partes de unidades como unidades inteiras. Isto revela as dificuldades dos alunos em considerar a unidade como a soma das suas partes e a recomposição da unidade pelas suas partes.

Curry, Mitchelmore e Outhred (2006) procuraram avaliar a compreensão dos cinco princípios da medição: a necessidade do uso de unidades congruentes, a importância de usar unidades de medida apropriadas, a necessidade de usar a mesma unidade de medida quando se comparam objetos (transitividade), a relação inversa entre o tamanho da unidade e o número de unidades necessárias e a estrutura da repetição de unidades. Verificaram que para o primeiro princípio – a necessidade do uso de unidades congruentes – na maioria das respostas incorretas, os alunos usaram diferentes unidades de medida para preencher os espaços dentro ou junto ao objeto dado e contaram o número de unidades usadas. Os alunos, normalmente rejeitam a possibilidade de usar unidades de área diferentes na base porque argumentam que é fisicamente impossível encaixar peças diferentes para preencher um retângulo e não porque é produzida uma medida inválida. Noutras palavras deram a resposta correta pelo motivo errado. Além disso, os alunos pareceram ter "uma compreensão muito mais pobre da necessidade de unidades idênticas que não deixam lacunas que muitas vezes os professores assumem, e podem realmente não ter uma noção clara do que estão medindo" (p. 383). No segundo princípio – a adequação das unidades de medida – muitos alunos indicaram incorretamente o limite da unidade (as extremidades da linha, o perímetro da figura ou as faces do bloco). No que diz respeito ao terceiro princípio - a necessidade de usar a mesma unidade de medida quando se comparam objetos – alguns alunos usaram unidades de medida diferentes para a cobertura de figuras semelhantes, mas com diferentes orientações, quando colocadas no quadro. Relativamente ao quinto princípio – a estrutura da repetição de unidades – vários alunos repetiram as unidades, aparentemente, sem a preocupação de alterar a posição da unidade de medida sem deixar falhas, já que fizeram medições incorretas por colocarem os dedos entre as repetições sucessivas da unidade de medida. Finalmente, no quarto princípio – relação inversa entre o tamanho da unidade e o número de unidades – as respostas dos alunos mostraram que alguns alunos ainda não tinham compreendido este princípio. Os alunos consideraram mais fácil determinar a área com uma unidade de medida com metade do tamanho daquela que já tinham usado do que com o dobro do tamanho.

Outhred e Mithelmore (2000) conjeturaram que alguns alunos do ensino primário não relacionam o número de quadrados nas linhas e colunas de um retângulo ao comprimento dos lados. Para Cavanagh (2008) há fortes evidências de estudos anteriores de que a estrutura subjacente ao arranjo linha por coluna, que resulta do processo de repetição de grelhas quadradas, não é óbvia e, portanto, os alunos de todas as idades têm dificuldades em descobrir a área de formas básicas bidimensionais.

Cavanagh (2008) e Tierney, Boy e Davis (1990) indicaram um erro relacionado com a tendência dos alunos se referirem à altura inclinada de uma forma quando deveria ser usada a altura perpendicular para calcular a área. Os alunos, simplesmente, não viram a necessidade de se certificarem que a altura perpendicular era usada e o facto de apenas alguns deles explicarem corretamente como a área do paralelogramo é igual à de um retângulo é outra evidência destes erros. Finalmente, os alunos mostraram uma compreensão limitada da relação entre a área do retângulo e do triângulo. Isto é, não deram uso ao facto da área do triângulo ser metade da de um retângulo com a mesma base e a mesma altura. Kordaki e Potari (2002) também se referem a estas dificuldades que dizem surgir quando os alunos usam a fórmula para calcular a área de triângulos ou paralelogramos. Os alunos consideram a altura como o comprimento de um dos lados. Este erro também foi detetado por Yew, Zamri e Lian (2011) que referem a confusão, por parte de dois professores estudados, do lado inclinado com a altura do paralelogramo, pelo que calcularam incorretamente a área da figura da tarefa.

Baturo e Nason (1996) concluíram que conceções erradas estão muitas vezes enraizadas e podem persistir na idade adulta. Kordaki e Potari (2002) também se referem a estudos que indicam que as dificuldades em medir áreas quando os alunos estão no nível do ensino primário permanecem quando chegam ao secundário ou à universidade.

Conclusões

Diversos estudos evidenciam erros e dificuldades dos alunos com a medida de comprimento. Os erros que surgem referem-se essencialmente à leitura da régua, especialmente se o zero da régua não estiver alinhado com a extremidade esquerda da linha a medir, ou à contagem das unidades de medida selecionadas. Os alunos, normalmente, não associam o valor que obtêm para uma determinada medida de comprimento à repetição das unidades usadas. Também não reconhecem a relação inversa existente entre o tamanho da unidade de medida e o número de unidades necessárias, o que provoca dificuldades no processo de medição. O facto de não manterem o mesmo comprimento nos intervalos entre as marcas que fazem para medir o comprimento de determinados objetos, produz erros nos resultados e pode originar outras dificuldades.

Vários estudos detetam confusão entre área e perímetro, que leva os alunos a somar as medidas dos comprimentos dos lados do retângulo para obter a área, a trocar as unidades de medida do perímetro e área, apresentando o perímetro em cm^2 ou a área em cm, a construir figuras com determinada área quando é pedida uma figura com esse valor para o perímetro ou a não saberem identificar numa figura o perímetro e a área.

O próprio conceito de área e a sua medição também provocam nos alunos várias dificuldades, especialmente no que respeita ao uso da fórmula da área do retângulo, que os alunos, muitas vezes, não compreendem. Quando medem área com unidades quadradas, deixam falhas ou sobreposições, cometendo erros de contagem. Também revelam dificuldades na utilização da estrutura linha por coluna pois não relacionam o número de quadrados nas linhas e colunas de um retângulo com o comprimento dos lados. No que diz respeito ao cálculo da área do paralelogramo e do triângulo, os alunos confundem a altura destas figuras com os lados inclinados e não relacionam a área do retângulo com a do triângulo e paralelogramo, o que certamente dificulta a compreensão da fórmula da área destes polígonos.

2.2. A origem dos erros dos alunos

Erros relacionados com o comprimento e o perímetro

Clements et al. (1997), no seu estudo, observaram três níveis de estratégias para resolver diferentes problemas relacionados com o comprimento e colocaram a hipótese de que os alunos passam por estes níveis durante o seu desenvolvimento do conceito de comprimento. Os alunos que operam no primeiro nível não dividem os comprimentos em partes nem relacionam o número atribuído à medida com o comprimento do segmento de reta. Em vez disso, aplicam estratégias gerais como a estimativa visual das medidas ou tentativa de adivinhar os números ou operações numéricas (que estavam por vezes desconectadas da sua estrutura espacial do problema).

Nas estratégias no segundo nível, os alunos relacionam os números ao trajeto do comprimento, associando cada movimento com o ganho correspondente na sequência numérica, à medida que contam. Apesar de serem capazes de repetir e contar os movimentos ao longo de um objeto direito, tiveram dificuldades em coordenar a repetição de movimentos ao longo de caminhos não lineares ou regrediram para contar o número de marcas ao longo de um caminho segmentado, sem interpretar as marcas como unidades de comprimento contabilizáveis (Barrett & Clements, 2003). Neste nível, os alunos desenharam pontos, marcas ou segmentos de reta para dividir ou segmentar comprimentos (não mantiveram as partes com o mesmo comprimento). Marcaram os comprimentos em unidades que faziam sentido para eles, usualmente unidades de 10, o que pode explicar a resistência de alguns alunos a construírem retângulos com medidas de perímetro que não são múltiplos de 10, em que o 10 pode ter sido uma unidade não decomponível para os alunos em determinado contexto. Os autores deste estudo referem que a habilidade para atribuir uma medida significativa a um segmento de reta sem ser figurativa (física ou graficamente), dividindo o segmento, representa um avanço significativo.

No terceiro nível os alunos não usaram divisão figurativa (ou deixaram de usar as divisões em determinada altura) mas usaram conceitos quantitativos na discussão dos problemas, desenharam figuras proporcionais e visualizaram os segmentos para lhes atribuir uma medida de comprimento. Os autores assumem que os alunos interiorizaram as medidas de comprimento e desenvolveram um sentido de medição que podiam impor mentalmente nas figuras. Não é uma imagem estática mas uma interiorização do processo de mover (visualmente ou fisicamente) ao longo do objeto, segmentando-o e contando os segmentos. Assim que os alunos no primeiro nível tiverem experiências de medição físicas suficientes, repetindo e dividindo com unidades, construíram esquemas que lhes permitiram dividir comprimentos que não estavam segmentados. Tais esquemas no segundo nível são figurativos, ou seja, os alunos precisam de realizar a ação física para criar divisões percetivas. Na resolução de problemas estes esquemas de divisão evoluem para incluir a crença de que intervalos iguais devem ser mantidos. Esta crença leva à construção de esquemas antecipatórios porque pode ser realizada mais eficazmente quando é feita no imaginário, em antecipação, sem forçar a utilização de marcas. Neste ponto emerge a terceiro nível. As predisposições e capacidades individuais dos alunos relacionando os esquemas numéricos e espaciais afetam a sua escolha e o emprego destas estratégias.

Barrett e Clements (2003) com base na pesquisa anterior (Clements et al., 1997) e no contexto da sua investigação durante a experiência de ensino desenvolveram modelos de níveis de pensamento das crianças acerca do comprimento e do perímetro. Estes investigadores acreditam que a mudança de descrever o comprimento num contexto unidirecional (como a divisão de um segmento em partes unitárias) até à capacidade abstrata de descrever o comprimento num contexto multidirecional é baseada no desenvolvimento de uma invariante, a relação multiplicativa entre o segmento unitário (representado por uma palhinha ou um azulejo) e o perímetro de um polígono (é unidimensional mas está representado no plano, bidimensional e multidirecional). Os autores creem que as crianças desenvolvem conceitos mais abstratos de comprimento e perímetro à medida que melhoram as conexões entre as contagens, divisões e esquemas de repetição. Os alunos do estudo pareceram progredir ao longo de quatro níveis de pensamento acerca do comprimento: 1, 2a, 2b, e 3. Barrett e Clements (2003) acreditam que o progresso ao longo destes níveis resulta do aumento da integração entre o conhecimento concetual e o conhecimento figurativo.

O nível 1 é indicado pela comparação visual entre objetos e o uso desadequado de números para descrever várias partes da mesma figura. As crianças que operam a este nível, frequentemente, falham ao relacionar o número correspondente à medida com o comprimento do segmento de reta indicado. Por exemplo, uma criança pode encontrar o comprimento de um lado de um objeto fazendo marcas com iguais intervalos e depois mudar o tamanho dos intervalos quando fizer marcas nos outros lados, apesar de fazer parte da mesma medida do perímetro, o que revela a tendência que as crianças têm de relacionar cada medição à partição da medição imediata de um lado e não a uma unidade universal usada para medir um lado no todo. Aparentemente, as crianças precisam de aprender que a unidade de comprimento é pelo menos parte de um lado e parte do perímetro.

O nível 2a é indicado pela necessidade de movimento ao longo do objeto para medir o seu comprimento ou perímetro. As crianças neste estádio esperam que a medição consista na contagem mas não são consistentes na sua atenção para medir as partes do objeto no todo, em vez disso, contentam-se em descobrir uma quantidade aproximada correspondente à leitura feita com a deslocação do olhar ao longo dos lados da figura que estão a medir. Neste nível de pensamento, as crianças focam-se na relação entre o número e o espaço no processo de medição mas ainda têm de apropriar as unidades a repetir ao longo dos lados da figura que medem.

O nível 2b é indicado pela integração, com sucesso, de uma única unidade de comprimento dentro de uma sequência de unidades ao longo de uma direção única. Neste nível, as crianças são capazes de representar imagens figurativas na ausência de imagens percetuais ou objetos. Este nível de pensamento inclui a capacidade de explicar e usar esquemas de integração parte-todo para unidades de comprimento e composições de unidades de comprimento. Uma limitação deste nível de pensamento é que a criança, provavelmente, antecipa o tamanho e extensão de sequências de unidades ao longo de percursos não lineares e à volta do conjunto dos lados de um polígono. Portanto, os esquemas generalizados de parte-todo não são prováveis de ser estabelecidos antes do nível 3.

O nível 3 é indicado pela capacidade de operar em unidades de unidades e de raciocinar acerca das medidas na ausência de quaisquer objetos percetuais. Uma criança que exiba este tipo de pensamento é capaz de impor unidades de unidades como uma regra concetual para estruturar medidas à volta de trajetos multidirecionais complexos. Esta estratégia depende da completa coordenação de esquemas numéricos e espaciais para polígonos e trajetos lineares no plano. As crianças coordenam as unidades de comprimento ao longo do perímetro de um polígono desencaixando imaginariamente as unidades ao longo de cada lado e do polígono inteiro, apesar de terem consciência de que cada unidade e que cada lado faz parte do percurso do polígono, o que permite às crianças coordenar as atividades de contagem ao longo dos lados e do perímetro.

Battista (2006, 2007) também é autor que se dedicou a estudar os erros relacionados com o perímetro. Na sua perspetiva, em geral, quando os alunos trabalham com problemas de medida em contextos diferentes dos usuais devem desempenhar dois processos críticos: (i) construir uma estrutura espacial própria da situação; (ii) coordenar a sua estrutura espacial com um esquema numérico apropriado. Frequentemente, os alunos saltam o primeiro processo e seguem diretamente para o segundo. Também, quando os alunos reconhecem que devem seguir o primeiro processo têm dificuldades em fazê-lo porque muitos currículos tradicionais ensinam prematuramente os procedimentos numéricos para a medição geométrica, logo os alunos não têm oportunidade de pensar nos procedimentos numéricos apropriados que aplicam e não têm oportunidades suficientes de desenvolver capacidades de estruturar espacialmente em fileiras de unidades de medida (Battista, 2007). De facto, o tradicional ensino prematuro focado nas fórmulas computacionais parece interferir com o desenvolvimento de conceitos de medição geométrica dos alunos.

Para Battista (2006) o conceito de comprimento é bastante importante quer no dia a dia quer na geometria formal mas, apesar da sua importância e aparente simplicidade, o conceito de comprimento pode ser muito difícil para os alunos compreenderem. O facto de os objetos possuírem várias magnitudes espaciais associadas pode tornar a construção do significado de comprimento muito difícil para os alunos. Battista indica que há dois tipos de raciocínio acerca do comprimento: o raciocínio *mensurável* e o raciocínio *não mensurável*. O raciocínio não mensurável (não usa números) e, em vez disso, usa inferências de visualização espaciais baseadas em comparações diretas, transformações imaginadas ou propriedades geométricas. O raciocínio mensurável envolve determinar o número de unidades de comprimento que cabem ao longo de um objeto sem falhas ou sobreposição. O processo de repetir a unidade de comprimento, uma seguida da outra, ao longo do objeto é chamado "repetição da unidade de comprimento". A unidade de comprimento serve como unidade ou como "um" a ser contado. É assumido que esta unidade permanece constante ao longo do processo de medição. O raciocínio envolvido na medição envolve não só a repetição das unidades de comprimento e o uso de instrumentos de medição mas também operar mentalmente com medições numéricas, por exemplo, adicionar o comprimento dos lados para descobrir o perímetro de um retângulo ou inferir que os lados opostos de um retângulo têm o mesmo comprimento. Apesar disto, os alunos, tipicamente, desenvolvem estratégias não numéricas antes das estratégias numéricas e o raciocínio não numérico continua a ser desenvolvido com mais sofisticação mesmo depois do raciocínio numérico aparecer. O raciocínio mais sofisticado acerca do comprimento envolve a integração do raciocínio não mensurável com o mensurável.

Battista (2006) descreve vários níveis de sofisticação no desenvolvimento destes tipos de raciocínio acerca do comprimento. O raciocínio não mensurável está dividido em três níveis: 0, 1 e 2 e o raciocínio mensurável está dividido em cinco níveis: 0, 1, 2, 3 e 4. No nível 4, o nível mais elevado do raciocínio mensurável, os alunos integram plenamente e aplicam o processo não mensurável do nível 2 com o seu raciocínio mensurável. Estes níveis, indicados na tabela da figura 3, descrevem os patamares cognitivos alcançados pelos alunos desde o raciocínio informal e pré-instrucional até ao raciocínio matemático formal. No nível 0 do raciocínio não mensurável (N0), o raciocínio é baseado na aparência e é holístico, pois os alunos focam-se em formas inteiras ou objetos. O nível 2 (N2) só emerge quando os alunos passaram muito tempo a estudar as propriedades das formas.

Levels of Sophistication in Students' Reasoning about Length

Nonmeasurement	Measurement
N0. Holistic visual comparison **N1. Comparison by decomposing or recomposing** 1.1 Rearranging parts for direct comparison 1.2 One-to-one matching of pieces **N2. Comparison by property-based transformations**	**M0. Use of numbers unconnected to unit iteration** **M1. Incorrect unit iteration** **M2. Correct unit iteration** **M3. Operating on iterations** **M4. Operating on numerical measurements**

Figura 3 – Níveis de sofisticação do raciocínio dos alunos acerca do comprimento (Battista 2006).

Battista (2007) refere que há dois tipos de abstração que são importantes na medição geométrica. O primeiro é *Abstrair o atributo*, ou seja, os alunos devem abstrair o atributo a ser medido (por exemplo, o comprimento), distinguindo-o de todos os outros atributos que o objeto possui. Isto pode acontecer através da reflexão iniciada por (a) lidar com vários tipos de situações problemáticas (por exemplo, comparar objetos, descobrir um objeto através de uma abertura) ou (b) interagir com pessoas que já processaram o conceito e direcionar a atenção para isso. O segundo princípio é *Abstrair a repetição de unidades*, e uma vez que o processo de abstrair repetições de unidades o suficiente para medir vários atributos geométricos é extremamente complexo, podem conjeturar-se alguns estádios no processo de abstração:

- Estádio 1 – Abstração incompleta da repetição de unidades (as repetições não são coordenadas e têm falhas, sobreposições e não há equivalência das unidades.
- Estádio 2 – Interiorização de unidades e coordenação (os alunos devem desenvolver um modelo de interiorização mental da unidade, que deve incorporar elementos relevantes da geometria da unidade e permitir coordenar a manipulação mental da unidade.
- Estádio 3 – Estrutura das repetições interiorizada (os alunos desenvolvem de interiorização mental da estrutura das repetições da unidade que tornem possível ver uma unidade particular em relação à sequência de repetições da unidade, permitindo aos alunos compreender a localização da unidade e estruturar repetições em termos de unidades compostas, bem como estabelecer a relação parte-todo entre a repetição das unidades e o todo, reconstituindo o todo como uma sequência de repetições da unidade (Barrett e Clements, 2003; Cobb et al., 2001).

- Estádio 4 – Medições numéricas tornam-se símbolos (são criados modelos mentais de repetições de unidades para o segundo nível de interiorização de modo que as enumerações resultantes se tornam símbolos).

Para Battista (2007), apesar das dificuldades dos alunos na medição serem alarmantes devido ao facto da medida ser essencial para as aplicações reais da geometria, estas dificuldades podem representar apenas a ponta do icebergue de grandes dificuldades de aprendizagem – um icebergue que a pesquisa ainda não investigou.

Erros relacionados com a área

Nunes, Ligth e Mason (1993) referem que tanto as réguas como as cordas representam o comprimento através da aplicação de unidades de comprimento mas em contraste, medir áreas com unidades de área não convencionais como tijolos ou azulejos é muito diferente do procedimento convencional transmitido na escola, onde a área é obtida multiplicando duas medidas de comprimento. A representação da área obtida através do procedimento de multiplicação convencional está claramente mais distanciada da dimensão representada e assim, a sua transmissão sistemática torna-se mais difícil de dominar do que a medição não convencional. Uma razão que explica o facto de as crianças terem mais sucesso com os tijolos é porque podem contar quantos tijolos são necessários para cobrir as figuras do que usar réguas, que requer a compreensão das relações multiplicativas. As práticas de medição culturalmente transmitidas variam no modo como estão relacionadas com a dimensão representada. A medição da área, por exemplo, envolve a obtenção de duas medidas de comprimento para serem usadas na fórmula. Apesar de a área poder ser medida com unidades de área, este procedimento raramente é usado. As crianças que compreendem as operações básicas envolvidas na medição podem não aprender de imediato as práticas culturais da medição da área ensinadas na escola. A sua dificuldade não pode ser explicada em termos de ausência do conceito de área ou falta de compreensão das operações de medição. Em vez disso parece estar relacionada com a relação complexa que existe entre a área e as operações de medição envolvidas na solução do comprimento × largura.

Nunes, Ligth, Mason e Allerton (1994) também sugerem que a fórmula que os alunos aprendem não serve os padrões que os alunos desenvolvem por eles. Apesar das crianças terem oportunidade de pavimentar figuras para determinar a sua área, eles servem apenas como uma regra para contar quadrados. Os alunos não têm, deste modo, nenhum problema para resolver e não têm necessidade de encontrar uma fórmula matemática para realizar esta tarefa. Depois de contarem quadrados é-lhes ensinada a fórmula do comprimento vezes a largura.

Para Baturo e Nason (1996), área pode ser considerada de duas perspetivas: (i) estática (a descrição de algo num certo ponto do tempo) ou (ii) dinâmica (uma função de uma coisa para a outra). A perspetiva estática equaciona a área como uma quantidade de região ou superfície no interior de uma fronteira e a noção de que essa quantidade pode ser quantificada. A perspetiva dinâmica foca a relação entre a fronteira da forma e o espaço no interior da fronteira, à medida que a fronteira se aproxima de uma linha, a área aproxima-se de zero. A perspetiva dinâmica não é usualmente incluída nos documentos curriculares limitando a compreensão da área pelos alunos, limitação essa que pode gerar equívocos como retângulos com o mesmo perímetro terem a mesma área. Outro tipo de dificuldades, referida por estes autores, emana de práticas culturais formais do cálculo de área. A prática cultural formal não é aplicar unidades de área para medir áreas, em vez disso é obter duas medidas de comprimento e usá-las na fórmula que nos dará o resultado em unidades de área (Nunes et al. 1993). Este procedimento de multiplicar duas medidas lineares (comprimento e largura) está conceptualmente distante da noção de área. Consequentemente a medida resultante é vista como estando pouco ou não estando relacionada com o que está a ser medido. Isto é evidenciado quando uma unidade de medida linear é usada em vez da unidade de medida de área para escrever o cálculo da área, por exemplo, 6 cm x 4 cm = 24 cm em vez de 24 cm^2. À semelhança de Nunes, Ligth e Mason (1993) e Nunes, Ligth, Mason e Allerton (1994), outra dificuldade referenciada por Baturo e Nason (1996) surge da prática cultural de medir áreas baseada na noção de multiplicação. Infelizmente muitos alunos só compreendem a multiplicação como adição repetida, a sua representação linear de uma dimensão, por isso são incapazes de produzir significado da medida de área calculada através da fórmula. Em muitos casos as dificuldades que os alunos experienciam com a medida de área estão relacionadas com as experiências de aprendizagem na escola. Há uma tendência para os professores se focarem no aspeto numérico em vez do desenvolvimento conceptual do processo de medida. Para muitos alunos as suas experiências de medir áreas têm sido a memorização e aplicação de fórmulas da área.

Também para Kordaki e Potari (1998), Kordaki e Potari (2002), Sherman e Randolph (2004) e Cavanagh (2008) as fórmulas memorizadas mal compreendidas é uma solução a curto prazo que não fornece a sua retenção a longo prazo nem a compreensão do conceito ou capacidades ao nível dos procedimentos, fatores muito importantes no sucesso e realização em todos os campos da Matemática. A tendência que muitos professores e manuais escolares têm de passar rapidamente para a multiplicação associada ao cálculo da área, especialmente através do uso de fórmulas para a área de figuras básicas, priva os alunos da oportunidade de estudarem o padrão e estrutura de fileiras (Kordaki & Potari, 2002).

De acordo com Outhred e Mitchelmore (2000) a origem experiencial da fórmula da área é a ação física de cobrir um retângulo com unidades quadradas mas enquanto esta ação é unidimensional e sugere um processo aditivo, a fórmula é bidimensional e multiplicativa. A passagem de uma unidade unidimensional para bidimensional envolve uma complexidade adicional, por isso não é surpreendente que a investigação indique que os alunos têm pobre compreensão das unidades de área e das suas características espaciais (Owens e Outhred, 2006). As crianças devem, portanto, trocar a abordagem intuitiva que enfatiza a cobertura de uma superfície para uma abordagem mais formal baseada na relação da área com as dimensões lineares de uma figura, sendo a ligação a estrutura de fileiras retangulares formadas pela cobertura de unidades quadradas. Outhred e Mithelmore (2000) sugerem que as estratégias de cobertura de retângulos das crianças podem ser classificadas em cinco níveis de desenvolvimento:

- **Nível 0: Cobertura incompleta**. Neste nível as unidades não cobrem completamente o retângulo sem falhas ou sobreposições. Alguns desenhos sugerem a tendência da criança se focar nos lados do retângulo em vez da estrutura interna. Outros mostram a indicação da estrutura da fileira mas deixam falhas. Alguns alunos simplesmente indicam unidades imaginárias sem desenhar mas o seu processo de contagem revela que deixam falhas ou sobreposições.
- **Nível 1: Cobertura primitiva**. Neste nível, as unidades cobrem totalmente o retângulo sem sobreposições mas a sua organização não é sistemática. As unidades podem variar no tamanho e na forma ou não estar corretamente alinhadas. O foco nos lados ainda pode ser evidente e as coberturas podem não mostrar o número correto de unidades, exceto por acidente.
- **Nível 2: Cobertura da fileira construída a partir da unidade.** Os desenhos, neste nível, mostram a estrutura da fileira correta, com igual número de unidades

aproximadamente retangulares em cada linha e coluna. Contudo, o tamanho de cada unidade é determinado a partir da unidade dada sem estar relacionada com as dimensões do retângulo. Assim, o tamanho de cada unidade pode simplesmente ser estimado por “olho”, copiado a partir de uma unidade concreta ou medido num dos lados. As respostas neste nível são apenas precisas quando estão disponíveis materiais concretos para pré-estruturar a tarefa.

- **Nível 3: Cobertura da fileira construída por medição**. Neste nível, o número de unidades em cada direção é determinado por medição e desenho. Uma dimensão é usada para determinar o número de unidades em cada linha, e a outra é usada para saber o número de linhas. A repetição das linhas é plenamente explorada. Pode só ser desenhada parte da fileira mas os procedimentos de contagem das crianças revelam, claramente, que toda a fileira foi visualizada. As crianças mais jovens que fazem desenhos neste nível tendem a determinar o número de unidades contando-as individualmente, enquanto que as crianças mais velhas tendem a usar a adição repetida ou multiplicação.
- **Nível 4**: **Fileira implicada, solução por cálculo**. Neste nível, o número de unidades é calculada a partir do tamanho da unidade e das dimensões do retângulo sem a criança fazer qualquer desenho. O procedimento de cálculo, usualmente a multiplicação e ocasionalmente a adição repetida, indica que a criança visualizou a fileira e aprendeu um procedimento baseado na estrutura da fileira. As respostas neste nível indicam uma sofisticação operacional equivalente ao conhecimento da fórmula da área.

Esta conjunto de níveis é sequencial ao nível do desenvolvimento no sentido em que cada nível é mais sofisticado que os níveis anteriores, não querendo necessariamente dizer que cada criança progride um nível da cada vez. Aparentemente, em qualquer faixa etária, no 1.º ciclo, uma criança pode operar em qualquer nível. O nível máximo é desenvolvido ao longo do tempo mas o nível atual usado para resolver determinada tarefa continua a depender das exigências específicas da tarefa.

A classificação em cinco níveis das estratégias indica o desenvolvimento gradual da habilidade da criança para representar a cobertura retangular num desenho ou numa imagem mental inferida. Parecem haver quatro princípios operacionais que são centrais para este desenvolvimento e são aprendidos sequencialmente, chamados de P1-P4 pelos autores do estudo (Outhred e Mithelmore, 2000). Estes princípios constituem a compreensão intuitiva dos alunos no que respeita à medição da área. São eles:

- P1: Cobertura completa – o retângulo deve ser completamente coberto pelas unidades sem falhas ou sobreposições.
- P2: Estrutura espacial – as unidades devem ser alinhadas na fileira com o mesmo número de unidades em cada linha.
- P3: Relações entre os lados – tanto o número de unidades em cada coluna com o número de colunas podem ser determinadas a partir dos comprimentos dos lados do retângulo.
- P4: Estrutura multiplicativa – o número de unidades na fileira retangular pode ser calculada a partir do número de unidades em cada linha e em cada coluna.

Nas estratégias do nível 0 nenhum destes princípios é evidente. As respostas do nível 1 sugerem tentativas de aplicar o P1 sem a ajuda da estruturação fornecida pelos outros três princípios. No nível 2, parece que as crianças aplicam o P1 e P2 mas não usam o P3 para determinar o tamanho da fileira. No nível 3 os desenhos indicam a aplicação do P3 e no nível 4 os desenhos tornam-se mais supérfluos quando as crianças usam o P4. Os investigadores notaram que apesar de o P4 refletir a estrutura multiplicativa da fileira, as crianças que o aplicam não usam necessariamente a operação multiplicativa para o cálculo. A aprendizagem do P3 depende da compreensão que as crianças têm da medição linear. Esta relação é tão importante que pode ser listado um quinto princípio, P5, essencial à compreensão operacional da cobertura de retângulos – o comprimento da linha especifica o número de unidades que cabem ao longo da linha. O P5 requer a compreensão relacional do procedimento de usar a régua. Os resultados do estudo sugerem que a compreensão relacional da fórmula da área desenvolve-se de acordo com a figura 4. Na construção deste modelo, Outhred e Mithelmore (2000) assumem que os conceitos de área e medição de área através da cobertura de retângulos podem ser aprendidos, até certo ponto, antes do estádio final na sequência.

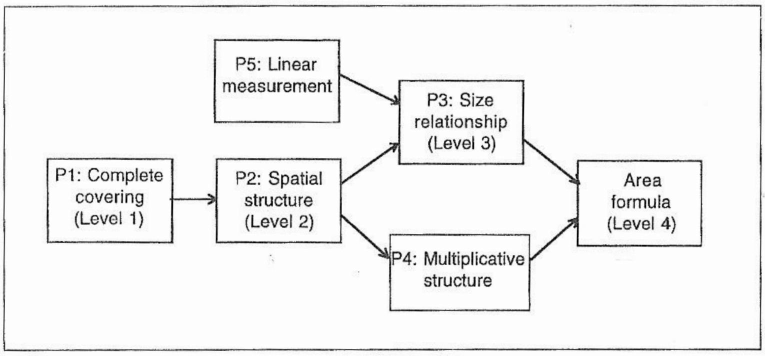


Figura 4 – Desenvolvimento da compreensão relacional da fórmula da (Outhred e Mithelmore, 2000).

Para Battista (2007), a compreensão genuína da medição da área e volume requer compreender (a) o que é o atributo de área ou volume e como se comporta (como por exemplo conservá-lo à medida que se move e como é decomposto e recomposto), (b) como a área ou volume é medida com as unidades de área ou volume, respetivamente, (c) como os processos numéricos podem ser usados para determinar as medidas de área ou volume para classes especiais de formas e (d) como estes processos são representados por palavras e álgebra. A ideia central no desenvolvimento da competência de medir área e volume nos sistemas de medida standard é compreender como enumerar com significado fileiras retangulares de quadrados e cubos em duas e três dimensões, respetivamente, como mostra a figura 5 (Battista 2004).

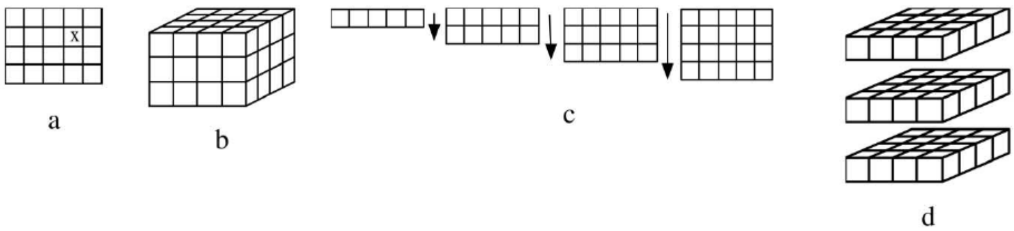


Figura 5 – Conjuntos de quadrados e cubos (a e b); unidades compostas (c e d) (Battista 2004).

Battista (2007) alega que são essenciais cinco processos cognitivos para a enumeração de fileiras de quadrados e cubos com significado: abstração, formar e usar modelos mentais, estruturação espacial, localização de unidades de medida e organização por composições. Battista (2004) ainda só refere quatro processos adicionais como essenciais, onde a abstração ainda não está inserida. No segundo processo, ao formar e usar modelos mentais, os indivíduos criam e usam representações mentais imaginárias ou recordações de experiencias já vivenciadas, que têm estruturas isomórficas para as estruturas percecionadas das situações que representam. Os modelos mentais consistem em conjuntos integrados de abstrações que são ativadas para visualizar, compreender e raciocinar acerca das situações com as quais lidam em ação ou pensamento. No terceiro processo, estruturação espacial, os indivíduos fazem abstrações da forma e composição de objetos, identificando, interrelacionando e organizando os seus componentes. No quarto processo, a localização de unidades, os alunos localizam quadrados e cubos através da coordenação da sua localização ao longo das dimensões que formam uma fileira. O quinto processo é relativo à organização por composições e combina as unidades espaciais básicas das fileiras (de quadrados e de cubos) em “unidades compostas” (entidade cognitiva, uma abstração), ou seja composições de unidades mais complexas, que podem ser repetidas ou criadas para gerar todo o conjunto. Os alunos apenas podem enumerar com significado fileiras de quadrados e cubos se tiverem desenvolvido devidamente modelos mentais estruturados que lhes permitem localizar corretamente e organizar quadrados e cubos (Battista, 2007).

Segundo Battista (2004), para numerosos tópicos matemáticos, os investigadores verificaram que o desenvolvimento das conceptualizações e raciocínio dos alunos pode ser caracterizado em termos de níveis de sofisticação. Um conjunto de níveis para um tópico (a) começa com o raciocínio informal da sua experiência (“pré-instrucional”) que os alunos tipicamente possuem, (b) termina com os conceitos matemáticos formais adquiridos na instrução e (c) indica os patamares cognitivos alcançados pelos alunos desde (a) até (b) como mostra a figura 6.

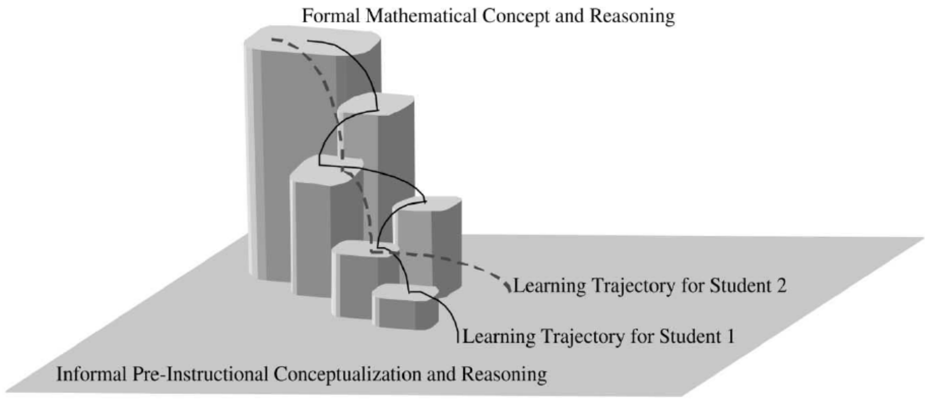


Figura 6 – Patamares dos níveis de sofisticação (Battista 2004).

O “terreno cognitivo” ao qual os alunos devem ascender para compreenderem uma determinada ideia matemática importante é multidimensional e inclui vários processos chave e conceptualizações. Os quatro processos cognitivos já referidos são agora usados para descrever níveis de sofisticação na compreensão dos alunos da medição da área e volume. Battista (2004, 2007) faz referência a sete níveis de sofisticação para a enumeração e estruturação de fileiras:

- **Nível 1 – Ausência dos processos de localização de unidades e organização por composições.** Os alunos não organizam as unidades em composições espaciais e, porque não coordenam apropriadamente a informação espacial, os seus modelos mentais de fileiras de cubos são insuficientes para localizar todas as unidades nas fileiras. A enumeração de quadrados ou cubos parece quase aleatória. O erro da dupla contagem é quase omnipresente.

- **Nível 2 – Início do uso da localização de unidades e do processo de organização por composições.** Os alunos não só começam a estruturar espacialmente as fileiras em termos de unidades compostas, como o seu desenvolvimento emergente do processo de localização de unidades também produz modelos mentais suficientes para eles reconhecerem composições equivalentes.
- **Nível 3 – O processo de localização de unidades torna-se suficientemente coordenado para reconhecer e eliminar erros de dupla contagem.** O maior avanço no pensamento ocorre quando o processo de localização de unidades do aluno coordena as vistas unidimensionais (exemplos: lado, topo, frente) num modelo mental que é suficiente para reconhecer a mesma unidade em diferentes vistas. Este modelo mental refinado permite ao aluno eliminar erros de dupla contagem causados pela coordenação insuficiente. Os alunos já conseguem compreender que os quadrados dos cantos fazem parte simultaneamente da coluna e da linha, permitindo-lhes perceberem que inicialmente fizeram dupla contagem.
- **Nível 4 – Uso de processos de organização por composições para estruturar um conjunto com o máximo de composições mas insuficiente coordenação para a repetição.** Os alunos estruturam conjuntos em termos de composições máximas (linhas ou colunas para área e blocos para volume), produzindo modelos mentais mais poderosos e eficientes para os conjuntos. Por exemplo, um aluno pode gerar uma linha de quadrados na direção de uma coluna para produzir uma fileira inteira mas, devido à insuficiência de coordenação, pode não localizar com precisão essas composições.
- **Nível 5 – Uso do processo de localizar unidades suficiente para localizar corretamente todas as unidades mas menos do que o máximo de composições usadas.** Este é o primeiro nível no qual o processo de localização de unidades é suficiente para criar um modelo mental que localiza corretamente todas os quadrados ou cubos numa fileira. De qualquer modo, apesar dos alunos acertarem nas respostas, porque organizam fileiras em composições sem eficiência ou consistência, com frequência perdem a posição na contagem ou

adição e cometem erros de enumeração. Além disso, as estratégias de estruturação e enumeração não são generalizáveis e não são adequadas para conjuntos maiores.

- **Nível 6 – Completo desenvolvimento e coordenação dos processos da localização de unidades e organização por composições.** Os modelos mentais dos alunos incorporam totalmente uma estrutura linha por coluna de tal modo que podem refletir com precisão e enumerar uma fileira sem material concreto ou percetivo para as unidades individuais de uma composição.
- **Nível 7 – Os esquemas de estruturação espacial e enumeração tornam-se suficientemente abstratos de modo que os alunos podem (a) compreender a relação entre procedimentos numéricos e estruturas espaciais e (b) generalizar o seu raciocínio a "pacotes".**
  (a) Os esquemas de estruturação espacial e enumeração dos alunos atingem um nível de abstração no qual podem refletir e analisar, compreendendo explicitamente a relação entre uma estratégia de enumeração e a estrutura espacial na qual é baseada.
  (b) Os modelos mentais dos alunos incorporam a estruturação linha por coluna ou camada que é suficientemente geral e abstrata para aplicarem a situações onde as unidades básicas não são quadrados ou cubos.

Conclusões

Os diversos autores explicam a ocorrência de erros e dificuldades dos alunos de acordo com os níveis de pensamento ou desenvolvimento em que estes se encontram. À medida que os alunos evoluem nos patamares ou níveis de desenvolvimento as dificuldades vão diminuindo, assim como a ocorrência de erros. Battista (2006) descreve os níveis de desenvolvimento do conceito de comprimento dividindo-os de acordo com o tipo de raciocínio (mensurável e não mensurável) utilizado pelos alunos, referindo que o raciocínio não mensurável normalmente antecede o mensurável, apesar de ainda ocorrer após esta transição. O raciocínio mensurável está dividido em quatro níveis e o raciocínio não mensurável apenas em três níveis. Barret e Clements (2003) falam em quatro níveis de desenvolvimento, começando na comparação visual de objetos e uso desproporcional de números até à capacidade de operar com unidades de medida e de raciocinar acerca das medidas de modo mais abstrato, o nível mais sofisticado, que pode ser equiparado ao quarto nível do raciocínio mensurável referido por Battista (2006). Battista (2007) refere-se a dois tipos de abstração essenciais na medição geométrica, abstração do atributo e abstração da repetição de unidades, que envolve quatro estádios de desenvolvimento, tendo em consideração a sua complexidade para os alunos.

A principal causa dos erros relacionados com a área apontada pelos investigadores é a ênfase colocada, pela escola, na fórmula da área do retângulo e passagem das unidades unidimensionais para as bidimensionais (também envolvida na fórmula), que os alunos não compreendem e, por vezes, não aplicam corretamente. Também a ausência da perspetiva dinâmica do conceito de área, que não é incluída nos documentos curriculares, limita a compreensão deste conceito pelos alunos.

Outhred e Mithelmore (2000) e Battista (2004, 2007), à semelhança das suas teses relativas à aprendizagem do comprimento e do perímetro, explicam os erros dos alunos com a enumeração de níveis de desenvolvimento pelos quais as crianças passam para a determinação de áreas baseada nas estruturas de fileiras de retângulos (linha por coluna). Consideram a estrutura inerente às fileiras de retângulos fundamental para a compreensão das fórmulas da área de figuras planas. Outhred e Mithelmore (2000) sugerem cinco níveis de desenvolvimento gradual da habilidade das crianças para representar a cobertura de retângulos (cobertura incompleta, cobertura primitiva, cobertura da fileira construída a partir da unidade, cobertura da fileira construída por medição e fileira implicada, solução por cálculo) para os quais são centrais quatro princípios operacionais (P1, cobertura completa, P2, estrutura espacial, P3, relações entre os lados e P4, estrutura multiplicativa). Para Battista (2004, 2007) os processos cognitivos essenciais à enumeração e estruturação de fileiras de retângulos (abstração, formar e usar modelos mentais, estruturação espacial, localização de unidades de medida e organização por composições) são usados para descrever os sete níveis de sofisticação (nível 1 – ausência dos processos de localização de unidades e organização por composições; nível 2 – início do uso da localização de unidades e do processo de organização por composições; nível 3 – o processo de localização de unidades torna-se suficientemente coordenado para reconhecer e eliminar erros de dupla contagem; nível 4 – uso de processos de organização por composições para estruturar um conjunto com o máximo de composições mas insuficiente coordenação para a repetição; nível 5 – uso do processo de localizar unidades suficiente para localizar corretamente todas as unidades mas menos do que o máximo de composições usadas; nível 6 – completo desenvolvimento e coordenação dos processos da localização de unidades e organização por composições e nível 7 – os esquemas de estruturação espacial e enumeração tornam-se suficientemente abstratos de modo que os alunos podem (a) compreender a relação entre procedimentos numéricos e estruturas espaciais e (b) generalizar o seu raciocínio a “pacotes”). Para Battista (2007) a verdadeira compreensão da medição de área e volume requer a compreensão: do conceito de área e seu comportamento, da forma como a área e volume são medidos e respetivas unidades de medida e dos processos numéricos que podem ser usados para determinar o seu valor.

2.3. Que estratégias são propostas para que os alunos ultrapassem os seus erros e dificuldades?

Erros e dificuldades relacionados com o comprimento e perímetro

Nunes, Ligth e Mason (1993) esperavam que os sistemas de medição convencionais fossem um suporte para ajudar os alunos nas atividades de resolução de problemas quando as unidades de medida estão claramente relacionadas com o objeto a ser medido. A régua pode ser uma ótima ferramenta na medição do comprimento mas pode dificultar a vida dos alunos na medição de áreas. A competência de medição dos alunos não pode ser definida sem referência à ferramenta de medição que usam do mesmo modo que a qualidade da ferramenta não pode ser definida sem referência ao uso que lhe é dado. Nas atividades de medição do comprimento as crianças beneficiaram do uso de instrumentos de medida já feitos. Os alunos beneficiaram com o uso de tecnologias de medição que lhes forneceram representações numéricas do objeto medido. Os alunos podem usar representações numéricas fornecidas pelas réguas mesmo que tenham de usar procedimentos para superar erros de leitura da régua (no caso de terem “réguas partidas”.

Clements et al. (1997) conjeturam que combinar experiências com e sem recurso ao computador (*Geo-Logo*) pode afetar positivamente as competências de medição dos alunos. Os alunos que não relacionam os esquemas numéricos com os espaciais podem beneficiar com atividades que os guiem a sintetizar estes dois esquemas. Primeiro, os alunos têm de prestar atenção à escala fornecida por certas figuras (por exemplo no trabalho com geometria, mapas ou gráficos). Segundo, os dados deste estudo indicam que os alunos com os dois esquemas relacionados têm à sua disposição estratégias de resolução de problemas espaciais mais flexíveis e poderosas. Terceiro, a atividade de relacionar ideias matemáticas é em si mesma uma atividade matemática valiosa. Clements et al. (1997) sugerem outras medidas de caráter mais geral como encorajar as conexões ao longo do currículo de Matemática, enfatizar a criação de unidades de medida pelos alunos, usar problemas não triviais, envolvendo os alunos, para que possam explorar, usar e comunicar acerca da matemática, escolher tarefas significativas que encorajem a análise matemática e usar ambientes de computador, como o *Geo-Logo*, que encorajam e apoiam o uso de conceitos e processos matemáticos. No estudo de Clements et al., o ambiente *Geo-Logo* foi essencial em fornecer tarefas significativas, que integraram os números com a geometria. O cenário geométrico forneceu tanto a motivação como modelos para os alunos pensarem acerca dos números e operações aritméticas. As motivações incluíram cenários de jogos e o desejo de criar formas geométricas. Os modelos incluíram o comprimento e rotação, assim como tarefas para construir um forte sentido dos números e as operações com números, com as ferramentas para medir e catalogar que apoiassem cada construção. Os aspetos numéricos das medições forneceram um contexto no qual os alunos tiveram de considerar certas propriedades das formas geométricas. As medições tornaram essas propriedades mais concretas e significativas para os alunos. A ligação dinâmica entre o domínio dos números e da geometria (por exemplo uma mudança no código refletia-se automaticamente numa mudança da figura geométrica) facilitou a construção de conexões entre os esquemas numéricos e espaciais dos alunos. Finalmente o *Geo-Logo* forneceu feedback que os alunos usaram para refletir no seu próprio pensamento.

Barret e Clements (2003) referem que a medição ganha significado a partir de comparações de objetos reais, de modo que os esquemas das crianças para a medição de objetos lineares tornam-se mais sofisticados quando as crianças estão envolvidas em situações realísticas baseadas na comparação. Também sugerem que, já que a régua representa a fusão dos objetos discretos e contínuos, no que respeita à repetição de um objeto ao longo do outro como meio de descrever a razão entre eles, construir e usar vários tipos de réguas pode auxiliar a discriminação entre quantidades discretas e contínuas. Pedir às crianças para explicarem a medição em várias representações interrelacionadas (desenhos incluindo as medidas, régua, anotações escritas ou verbais) promove um conhecimento mais “robusto” do perímetro e ajuda as crianças a integrarem as sequências de contagem no seu esquema espacial para o comprimento.

Estes autores também sugerem seis estratégias de ensino usadas no estudo e que podem ajudar os alunos a identificar estruturas de comprimento relevantes e atendem às relações das medidas de comprimentos em figuras complexas. Os professores podem: (i) enfatizar verbalmente as propriedades dos objetos que empregam como unidades para focar a atenção dos alunos na dimensão medida, (ii) coordenar a medida de comprimento à volta de um polígono, descrevendo o perímetro como uma única linha e como a soma do comprimento dos lados, (iii) identificar atributos relevantes e irrelevantes de objetos para medir, (iv) ajudar os alunos a mover fisicamente (movendo ou traçando) ao longo dos objetos que estão a medir, sendo rápidos a diferenciar entre o aumento de movimentos ao longo de um trajeto linear e a contagem das partes do trajeto, (v) pedir aos alunos para fazerem e rotularem desenhos como dados da atividade de medição para enfatizar as conexões parte-todo entre o perímetro e os lados e (vi) contextualizar as atividades de medição dos alunos, criando narrativas ou histórias envolvendo a comparações.

Para Battista (2007), os alunos também precisam de preparação apropriada antes de aprender acerca do uso de ferramentas de medição estandardizadas como as réguas e o uso de fórmulas. Os alunos necessitam de desenvolver a compreensão do uso apropriado de unidades de medida do comprimento, área e volume.

Segundo Battista (2006), ao localizar em que nível de sofisticação se encontra um aluno no seu itinerário construtivo para o comprimento, ficamos com muito melhor ideia acerca do modo como aprende o conceito de comprimento e como se deve processar a instrução. Também ajuda a melhor compreender as dificuldades que os alunos possuem à medida que tentam dar sentido ao conceito de comprimento e os pequenos passos que devem tomar para alcançar a compreensão total deste conceito tão crítico.

Erros e dificuldades relacionadas com a área

Para Nunes, Ligth e Mason (1993) muitos alunos que falham a resolução de problemas de comparação de áreas quando se focam nas medidas de comprimento, podem, sem outras instruções, obter soluções multiplicativas corretas usando unidades de área. Metade das crianças entrevistadas no seu estudo produziram as suas próprias soluções multiplicativas para quantificar áreas, baseadas na conceção do número de tijolos numa coluna vezes o número de colunas. Esta conceção preserva a relação entre a unidade de medida e a dimensão medida e aumenta significativamente a probabilidade das crianças obterem sucesso na medição de áreas. Na conceção da instrução devem ser consideradas tanto as dificuldades conceptuais como as dificuldades relacionadas com as práticas de medição. A introdução de práticas culturais que apoiam as abordagens intuitivas dos alunos parecem influenciar positivamente o raciocínio dos alunos. Em contraste, outras práticas culturais podem diferenciar-se das abordagens dos alunos ao problema e envolvem representações distanciadas do objeto a ser medido. Estas práticas parecem interferir no apoio ao raciocínio dos alunos durante a resolução do problema, como observado no que respeita à medição do comprimento e largura para obter a área. Isto não quer dizer que as práticas culturais não têm um papel a desempenhar na instrução escolar. O valor de calcular a área a partir das medidas de comprimento em vez de usar unidades de área complicadas não é recusado. Contudo, a instrução pode ser concebida tendo em conta a compreensão inicial que os alunos têm do conceito de área como o "número de tijolos numa coluna vezes o número de colunas" para que os alunos estabeleçam a relação entre estas duas fórmulas.

Nunes et al. (1994) referem que o sucesso na compreensão da área não é independente dos recursos que são dados aos alunos para representar áreas durante a resolução de problemas. As ferramentas de medição fazem parte da situação a ser dominada e constituem uma forma de estruturar as estratégias e ações das crianças. Os alunos que trabalharam com "tijolos" tiveram mais sucesso na resolução de problemas do que aqueles que trabalharam com réguas. As ferramentas de medição têm um papel estruturante no raciocínio dos alunos acerca da área porque são recursos com os quais os alunos podem operar em concreto na situação. De um modo geral, os resultados do estudo fortalecem a ideia de que os sistemas de símbolos estruturam o raciocínio tornando-se parte da lógica das ações numa situação. A representação deve ser tida em conta quando os programas são concebidos.

Kordaki e Potari (1998) referem que os conflitos com os quais as crianças do seu estudo se depararam nas suas tentativas de implementar, em papel, as suas estratégias iniciais, levou-os a reconsiderarem e melhorarem as suas abordagens. A influência das ferramentas nas ações das crianças foi bastante aparente quando o seu uso foi restringido. Por exemplo, as ferramentas que eles desenvolveram quando não puderam usar a fórmula ou ferramentas de medição usuais estavam mais relacionadas com o próprio conceito de área. Além disso, estas ferramentas expuseram o pensamento das crianças acerca dos aspetos fundamentais do conceito de área como a conservação, unidade e repetição de unidade. Para Kordaki e Potari (1998) as práticas escolares precisam de ensinar o conceito de área com uma orientação mais integrada e cultural e colocar menos importância no mero cálculo da fórmula. Dando às crianças a oportunidade de "enfrentar" a medição da área em diferentes contextos, elas podem estabelecer relações entre os diferentes aspetos do conceito e construir um conceito de medida de área mais maduro.

Chappell e Tompson (1999) também sugerem que para os alunos melhorarem o seu desempenho necessitam de explorar o perímetro e a área e não apenas aplicar fórmulas. Os alunos necessitam de construir representações visuais de figuras com o perímetro e área fornecidos, gerar problemas relacionados com esses conceitos e justificar as propriedades. Os resultados do estudo destes autores levam a crer que os alunos necessitam de trabalhar com os conceitos de perímetro e área em simultâneo para os poderem distinguir com clareza. Os professores podem conceber questões que levem os alunos a confrontar estes conceitos de modo significativo.

Kordaki e Potari (2002) argumentam que, em primeiro lugar os alunos devem explorar espacialmente as áreas, em segundo lugar devem transformar e comparar áreas fisicamente e de modo pictórico e só depois usar as fórmulas da área. O estudo de Kordaki e Potari demonstrou que um ambiente de aprendizagem que forneça várias ferramentas pode gerar diferentes representações do conceito de medida de área e pedir aos alunos que resolvam tarefas "de qualquer modo possível" estimula-os a construírem várias estratégias de solução para tarefas que envolvam este conceito. No ambiente informático interativo onde os alunos trabalharam, todos conseguiram expressar várias abordagens à medida de área e enriqueceram os seus pontos de vista. Também progrediram de abordagens primitivas para abordagens mais avançadas e de abordagens erradas para corretas. Uma das abordagens de medição salientou o uso da operação automática da medição da área e foi a usada inicialmente pelos alunos. Mostrou a tendência que os alunos têm em focar-se nos resultados numéricos da medição produzidos pelo computador. Esta ferramenta atuou construtivamente como uma ferramenta e avaliação, apesar das suas limitações no processo de desenvolver estratégias de solução significativas. Quando esta ferramenta foi usada em combinação com a ferramenta de medição automática do comprimento, ajudou os alunos a ultrapassarem a confusão que faziam entre área e perímetro e a construírem significados semi-qualitativos para a medição da área. Outra abordagem de medição salientou a "operação da medição da área usando unidades espaciais", em que os alunos estiveram ativamente envolvidos no processo de medição da área, focando-se nas suas características espaciais e atribuindo-lhe um significado pessoal, qualitativo, visual e aproximado. A maioria dos alunos envolvidos nesta abordagem demonstrou que conseguia expressar melhor o seu conhecimento matemático acerca da medição da área em sistemas de representação espacial do que em sistemas simbólicos. Os alunos experimentaram, igualmente, uma certa variedade de unidades de medida permitindo-lhes ultrapassar as dificuldades relacionadas com a relação inversa entre o tamanho e o número de unidades necessárias para cobrir uma determinada área. Ultrapassaram a dificuldade da repetição na contagem das unidades, tirando proveito do feedback visual e da operação automática, respetivamente. Utilizando o processo de usar a fórmula da área no ambiente informático, os alunos olharam com mais profundidade para a relação existente entre as diferentes unidades dos sistemas de medida do comprimento. Os alunos também fizeram a ponte de ligação entre a medição da área usando unidades de medida e a fórmula. Deste modo deram significado qualitativo e espacial à fórmula da área, relacionando as representações simbólica e espacial.

Para Battista (2004) os alunos devem (a) desenvolver a compreensão de como determinar as medidas de figuras não retangulares, (b) ser capazes de relacionar a sua compreensão da medição da área e volume através da decomposição e recomposição de figuras e (c) estender o seu pensamento acerca das medidas de área e volume às medidas de números racionais (vs. integrais). Nesta altura, Battista alegava que novas pesquisas seriam necessárias para descrever os níveis de sofisticação nestas áreas e para poderem ser relacionadas com os níveis descritos no seu artigo.

Para Sherman e Randolph (2004), as experiências de construir, desenhar e medir, iniciadas ao nível concreto e que progrediram para atividades representativas proporcionaram boas oportunidades para os alunos construírem os conceitos por eles próprios. As atividades que envolveram o pensar acerca da casota do cão e desenhar as iniciais dos nomes foram um desafio e revelaram-se significativas para os alunos do 4.º ano, pois o contexto das tarefas estava relacionado com os alunos. Para estes autores, medida e geometria são tópicos do currículo escolar que podem ser ensinados de um modo que encoraje a construção da compreensão de conceitos com experiências diretas. Aplicações ao mundo real são numerosas, do agrado dos alunos e parte integrante do sucesso na Matemática, quer seja na continuação dos estudos, que na vida quotidiana.

Owens e Outhred (2006) referem que alunos que representaram a estrutura de uma tabela em termos de linhas e colunas tendem a contar por grupos ou usar a multiplicação. Estes autores recomendam que ligar a contagem à estrutura da tabela pode ser uma boa técnica para desenvolver tanto a multiplicação como o conceito de área. O conhecimento da estrutura da tabela fornece a base para o trabalho com o número de unidades quadradas necessárias para preencher um retângulo (Outhred e Mitchelmore, 1996). Em particular, os alunos perceberem que o número de unidades em cada coluna e linha pode determinar o comprimento dos lados do retângulo é um princípio fundamental na medição da área. Owens e Outhred (2006) também recomendam as atividades práticas no ensino da medida usando unidades informais porque podem servir para mostrar os princípios da medida.

Por outro lado, segundo Cavanagh (2008) há fortes evidências de estudos anteriores de que a estrutura subjacente ao arranjo linha por coluna, que resulta do processo de repetição de grelhas quadradas, não é óbvia: os alunos necessitam de prática considerável em construir essas grelhas à mão e cobrir as regiões se quiserem desenvolver uma boa compreensão conceptual da medição de área (Outhred e Michelmore, 2000). Os alunos necessitam de prática considerável na construção das suas próprias grelhas, quadrado por quadrado, até começarem a considerar a estrutura dos conjuntos que formaram. Considerando essas tarefas e permitindo que o tempo para as ideias básicas se torne evidente, é fundamental que os alunos reconheçam que cada linha ou coluna tem, necessariamente, de conter o mesmo número de unidades e depois, que usem a linha ou coluna como uma unidade composta que pode ser repetida para guardar o desenho de cada grelha quadrada individualmente. Só envolvidos ativamente nestas atividades é que a natureza multiplicativa do conjunto pode ser manifestada para os alunos (Battista, 2003).

Para Cavanah (2008) a consideração mais importante na conceção de instrução é fornecer atividades apropriadas e dar tempo suficiente aos alunos para desenvolverem uma sólida compreensão dos conceitos envolvidos na estrutura de fileiras ou conjuntos, antes de procederem aos cálculos numéricos das fórmulas da área. Se isto não for feito, os alunos, provavelmente, não reconhecerão nem usarão os princípios fundamentais da medição de áreas e surgirão, inevitavelmente, conceções erradas. Mesmo em anos mais avançados, os alunos também podem beneficiar das atividades associadas à construção de grelhas à mão e notar que a estrutura linha por coluna em formas irregulares e retângulos simples é a base para o desenvolvimento das fórmulas da área. É de extrema importância que os alunos tenham oportunidade de construir grelhas por eles próprios em vez de simplesmente observarem grelhas já preparadas. Ter tempo para desenvolver a fórmula da área mais lentamente, dá aos alunos a oportunidade de desenvolverem uma boa compreensão dos conceitos e constitui uma base sólida para outros trabalhos na área da medição. Também oferece várias oportunidades para discutir prováveis equívocos que surgem inevitavelmente e para que os mal-entendidos possam ser revelados e corrigidos antes de se estabelecerem firmemente.

Conclusões

Como facilitador da aprendizagem do conceito de comprimento, os autores apresentados fazem bastante referência aos instrumentos de medição como recurso a incluir nas atividades de aprendizagem, sejam réguas normais ou condicionadas ou ferramentas informáticas. Deve-se ter em atenção que o conhecimento do nível em que se encontram os alunos é importante para poder planear as tarefas a propor e que os alunos necessitam de preparação antes do uso destas ferramentas. Diversos autores sugerem outras estratégias de natureza mais geral como atividades de caráter prático e de índole problemática que desafiem os alunos e os levem a experimentar e manipular objetos geométricos, a fim de descobrirem e compreenderem as suas propriedades.

Também na aprendizagem da área os autores sugerem o recurso a atividades práticas, concretas e diretas com instrumentos de medição adequados e apropriados à medição de áreas, de modo a estarem relacionadas com este conceito e com a sua unidade de medida, e retirarem a ênfase dada à memorização e aprendizagem da fórmula sem compreensão. Sugerem, também, que se devem ter em atenção as dificuldades resultantes de prática de medição dos alunos nas práticas de ensino. Alguns autores sugerem o uso de ferramentas informáticas interativas e outros atividades como a composição e decomposição de figuras, assim como a determinação da medida da área de figuras não retangulares. Outros, ainda, sugerem ligar a contagem das unidades quadradas à estrutura da tabela ou fileiras de retângulos e que devem ser os alunos a construir as próprias grelhas, referindo que deve ser dado tempo suficiente para os alunos o fazerem e compreenderem.

Uma forma de ajudar os alunos a distinguir área de perímetro poderá ser trabalhar estes dois conceitos em simultâneo. Aliás, nalguns estudos o trabalho desenvolvido com os alunos evoluiu no sentido de os ajudar a distinguir estes dois conceitos, e, portanto, os resultados sugerem o trabalho simultâneo dos mesmos.

Capítulo 3

Unidade de Ensino

3.1. Fundamentação e hipótese de ensino-aprendizagem

Orientações curriculares

A apropriação da linguagem e dos conceitos geométricos realiza-se de um modo gradual, em contextos diferentes, ao longo dos diferentes anos de escolaridade. No 1.º ciclo são aprendizagens essenciais a compreensão dos conceitos de grandeza e medida e a capacidade de resolução de problemas envolvendo de situações ligadas à medida de várias grandezas. No 2.º ciclo estas aprendizagens continuam a ser relevantes, associadas à resolução de problemas do quotidiano, sendo também trabalhada a noção de perímetro em diversas figuras geométricas e aprofundando-se o conceito de área, incluindo o estudo das fórmulas das áreas do triângulo e do círculo (ME, 2007).

De acordo com Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999), é importante levar os alunos a construir o conceito de grandeza, a medir e a realizar estimativas, pelo que é necessário partir da perceção da grandeza a medir e depois comparar objetos que possuem esse atributo. O surgimento das fórmulas e procedimentos para determinar medidas deve ser proveniente de situações concretas. As orientações curriculares para o ensino da Matemática (ME, 2007) também referem que a introdução de fórmulas só deverá decorrer de modo significativo, em anos de escolaridade mais avançados. Nos primeiros anos de escolaridade, os alunos devem calcular o perímetro e a área através de instrumentos de medição, mas depois deverão começar a aprender que as medidas podem ser calculadas através de fórmulas e que nem sempre necessitam de recorrer à medição direta, através de instrumentos. Segundo o NCTM (2007), "sempre que possível, os alunos deverão compreender e desenvolver fórmulas e procedimentos, por meio de investigações e não pela sua memorização" (p. 286). Mesmo as fórmulas que se revelam mais difíceis para os alunos, em determinados anos de escolaridade, como por exemplo a fórmula da área do círculo, "devem ser abordadas de modo que os alunos possam desenvolver um sentido intuitivo da sua plausibilidade" (NCTM., 2007, p. 286).

No Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) o estudo da geometria deve ser baseado em tarefas que proporcionem oportunidades para os alunos observarem, analisarem, relacionarem e construírem figuras geométricas e de operar com elas, sendo "os programas computacionais de geometria dinâmica e os *applets* favorecem igualmente a compreensão dos conceitos e relações geométricas, pelo que devem ser também utilizados" (ME, 2007, p. 37). O NCTM (2007) também faz referência a este tipo de programas enunciando que "a aprendizagem dos alunos é auxiliada através do feedback que a tecnologia pode proporcionar: num ambiente de trabalho de geometria dinâmica, arrasta-se um ponto e a forma observada no ecrã altera-se" (p. 27). Também refere que os alunos mais novos, dispondo das tecnologias, poderão investigar as propriedades das formas através da utilização de um programa informático de geometria dinâmica. Deste modo, o recurso a ambientes de geometria dinâmica é sugerido nas orientações programáticas e curriculares dos vários níveis de ensino. Um software de geometria dinâmica recente é o GeoGebra, que possibilita o trabalho simultâneo no ambiente geométrico e algébrico e é de utilização livre. Este software começou há relativamente pouco tempo a ser usado na sala de aula, pelo que carece de investigação em torno da sua utilização de modo a ser possível identificar as suas vantagens para a aprendizagem em relação a outros softwares e, por outro lado, para compreender se haverá dimensões da atividade com os ambientes de geometria dinâmica que poderão sair diminuídas neste caso (Oliveira & Domingos, 2008).

Hipótese geral de ensino-aprendizagem

Considerando a revisão de literatura relativa ao ensino e aprendizagem de áreas e perímetros, as orientações curriculares e a minha experiência profissional, enquanto docente de Matemática do 5.º ano do ensino básico e considerando os conhecimentos anteriores dos alunos formulei a hipótese de ensino e aprendizagem segundo a qual os alunos desenvolvem melhor a sua compreensão de perímetro e área:

(i) ao trabalharem em simultâneo os dois conceitos, para os poderem distinguir com clareza resolvendo questões que os confrontem de modo significativo (Chappell & Tompson, 1999);
(ii) realizando atividades de caráter prático que os desafiem e os levem a experimentar e manipular objetos geométricos, a fim de descobrirem e compreenderem as suas propriedades, recorrendo a ferramentas próprias e operando com figuras e transformando-as, envolvendo-se em situações realísticas, baseadas na comparação. As experiências de construir, desenhar e medir, iniciadas ao nível concreto e que progridem para atividades representativas podem proporcionar boas oportunidades para construírem os conceitos por eles próprios;
(iii) usando ferramentas informáticas, já que favorecem as relações geométricas e compreensão dos conceitos, relacionam os esquemas numéricos e espaciais dos alunos pois a ligação dinâmica entre o domínio dos números e da geometria facilita a construção de conexões entre os dois esquemas (Clements et al., 1997), fornecem feedback imediato aos alunos, constituem um fator motivador e estimulam a construção de diferentes estratégias de resolução de tarefas;
(iv) usando ferramentas de medição apropriadas, quer para o perímetro (comprimento), quer para a área (unidades quadradas) pois a competência de medição dos alunos não pode ser definida sem referência à ferramenta de medição que usam do mesmo modo que a qualidade da ferramenta não pode ser definida sem referência ao uso que lhe é dado (Nunes, Light e Mason, 1993);
(v) usando diferentes unidades de medida e tendo em atenção a sua adequação à grandeza estudada; e
(vi) desenvolvendo a compreensão de como determinar as medidas do perímetro e área de figuras não retangulares.

Objetivos de aprendizagem

A escolha das tarefas tem em consideração as indicações do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007). Pretendo que os alunos compreendam grandezas geométricas (perímetro e área) e respetivos processos de medida, bom como a capacidade de utilizar estes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas em contextos diversos. Assim, os alunos devem: (i) compreender propriedades das figuras geométricas no plano; (ii) desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capazes de os usar e (iii) ser capazes de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em situações que envolvam contextos geométricos. Também pretendo promover as capacidades transversais: (i) resolução de problemas; (ii) raciocínio matemático e (iii) comunicação matemática.

Deste modo, incluo na unidade de ensino tarefas de natureza exploratória e problemas com e sem recurso ao software de geometria dinâmica GeoGebra, cuja resolução poderá proporcionar aos alunos experiências de ensino significativas, permitindo desenvolver o raciocínio matemático e a capacidade de resolução de problemas. Para desenvolver a capacidade de comunicação matemática dos alunos valorizo o trabalho em grupo e a pares e momentos de discussão coletiva.

Trajetória de ensino prevista

A organização da unidade de ensino é baseada no conhecimento que tenho dos alunos do 5.º ano, de quem sou diretora de turma e professora de Matemática, Ciências da Natureza e Educação e Cidadania, e na revisão da literatura. Pretendo efetuar teste diagnóstico a fim de perceber quais os conhecimentos e dificuldades dos alunos no que respeita aos conceitos de perímetro e área e à determinação da sua medida.

Tendo em conta as ideias e processos matemáticos que pretendo que os alunos desenvolvam, preparei a unidade de ensino em oito fichas de trabalho, organizadas de acordo com os tópicos, ideias e processos matemáticos envolvidos. As fichas de trabalho englobam tarefas a realizar com recurso ao GeoGebra e outras tarefas de exploração e resolução de problemas e exercícios. Procurarei seguir o percurso:

1. Inicialmente, começo por relembrar os conceitos de área e perímetro trabalhados no 1.º ciclo e pedir aos alunos que identifiquem e determinem o perímetro e área de polígonos, com o auxílio do GeoGebra, para que estes concluam que figuras com a mesma área podem ter, ou não, o mesmo perímetro.
2. De seguida, proponho tarefas de investigação para que os alunos explorem o que acontece ao perímetro e área de retângulos quando se alteram as dimensões (comprimento e largura) mas não se altera o perímetro e verifiquem o que acontece ao perímetro e área de retângulos quando se duplicam as dimensões.
3. Posteriormente, para introduzir a área do triângulo, proponho uma tarefa no GeoGebra para os alunos traçarem alturas do triângulo e se apercebam que a altura não corresponde ao lado inclinado do triângulo e que podemos traçar três alturas num triângulo.

4. Na tarefa seguinte os alunos irão relacionar a área do triângulo com a do retângulo.
5. No momento seguinte pretendo que os alunos, a partir da medida do perímetro e do diâmetro de vários círculos, cheguem a um valor aproximado da constante π e à fórmula que permite determinar o perímetro do círculo, através de uma tarefa de exploração com o GeoGebra. Estabelecendo relações entre o perímetro e o diâmetro, os alunos deduzirão a fórmula para calcular o perímetro de círculos com uma atividade concreta e de cunho exploratório, evitando a mera memorização de uma fórmula que podem não compreender.
6. Para finalizar pretendo introduzir o conceito de área do círculo a partir da área do retângulo, numa tarefa envolvendo materiais concretos onde os alunos poderão decompor o círculo em figuras próximas de triângulos para formarem um retângulo, cuja área já saberão determinar.

Modo de trabalho na sala de aula

As tarefas serão introduzidas com um diálogo entre mim e turma, em coletivo, o que terá como objetivo, em primeiro lugar, rever e sintetizar os assuntos já abordados, no 1.º ciclo e nas aulas anteriores, relativas ao perímetro e área, permitindo-me aferir os conhecimentos e dificuldades experienciadas nas tarefas anteriores. Em segundo lugar, pretendo introduzir as novas tarefas, estabelecendo a ligação com as tarefas anteriores. Em terceiro lugar explicitarei aos alunos os objetivos propostos para cada tarefa e respetiva finalidade. Poderei colocar questões aos alunos tais como: (i) o que falámos na aula/tarefa anterior? (ii) o que se lembram das tarefas anteriores? (iii) o que fizemos? (iv) quais as conclusões que obtivemos? Posteriormente entregarei a cada aluno uma ficha com o enunciado das tarefas, que será lido, em voz alta. Cada tarefa será minuciosamente explicada e as dúvidas dos alunos poderão ser analisadas neste momento e durante a execução das tarefas.

À exceção do pré e pós-testes e das fichas de trabalho 4 e 5A, que serão realizados individualmente, a maioria das fichas de trabalho serão realizadas a pares. A ficha de trabalho 2 poderá ser executada por grupos de três ou quatro alunos para enriquecer as discussões entre os alunos e facilitar a discussão final das conclusões. Aquando da execução das tarefas circularei pelos diferentes grupos prestando auxílio e esclarecendo eventuais dúvidas, colocando questões e encaminhando os alunos no sentido de os ajudar a obter as conclusões esperadas.

Quando todos os grupos terminarem a resolução da tarefa ou quando tenha terminado o tempo estabelecido para a sua resolução, proceder-se-á apresentação e discussão das conclusões obtidas. Cada grupo, um de cada vez apresentará à restante turma a forma como resolveu a tarefa. Solicitarei aos restantes grupos que exprimam a sua opinião quanto às conclusões obtidas pelos colegas, referindo se concordam ou não e justificando a sua opinião. No caso de surgirem resultados diferentes e opiniões distintas, solicitar-se-á a esses grupos que exemplifiquem o modo como raciocinaram. No caso de todos os grupos terem obtido as mesmas conclusões que o primeiro grupo, durante a discussão, já não se justificará a apresentação à turma do trabalho efetuado por esses grupos.

3.2. Planificação da unidade de ensino

O quadro 1 apresenta a proposta de planificação das fichas que integram a unidade de ensino, que contém os tópicos matemáticos que serão explorados e objetivos específicos do programa, bem como o modo de trabalho e a duração em minutos e em blocos. A unidade de ensino é composta por oito fichas de trabalho com vários tipos de tarefas. De acordo com os tópicos abordados e com a hipótese geral de ensino-aprendizagem defini diversos objetivos para cada uma das fichas de trabalho.

Ficha de trabalho 1

Com a tarefa proposta nesta ficha de trabalho pretendo que os alunos distingam área de perímetro (dificuldade reportada na revisão de literatura) a partir da resolução de um problema relacionado com a vida real. Os alunos recorrerão ao software de geometria dinâmica GeoGebra, que conterá a imagem da tarefa, que poderão manipular através das ferramentas do software. Os objetivos de aprendizagem definidos para a tarefa são: (i) determinar o perímetro de polígonos regulares e irregulares; (ii) resolver problemas envolvendo perímetros e áreas de polígonos; (iii) compreender a noção de equivalência de figuras planas e distinguir figuras equivalentes e figuras congruentes; (iv) calcular a área e perímetro de figuras planas simples; (v) identificar os dados, as condições e o objetivo do problema; (vi) conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados; e (vii) discutir resultados, processos e ideias matemáticas.

Quadro 1 – Planificação da unidade de ensino

Aulas previstas: 11 blocos de 90 minutos					
Fichas de trabalho	Tópicos	Objetivos específicos	Modo de trabalho	Duração em min.	Blocos
Pré-Teste	• Perímetros e áreas	- Diagnosticar o conhecimento dos alunos sobre áreas e perímetros antes da unidade de ensino.	Individual	45	0,5
Ficha 1	• Polígonos regulares e irregulares • Equivalência de figuras planas	- Determinar o perímetro de polígonos regulares e irregulares; - Resolver problemas envolvendo perímetros e áreas de polígonos; - Compreender a noção de equivalência de figuras planas e distinguir figuras equivalentes e figuras congruentes; - Calcular a área e o perímetro de figuras planas simples.	Pares	90	1
Ficha 2	• Perímetros e áreas • Relações e regularidades	- Determinar o perímetro de polígonos regulares; - Identificar sequências e regularidades numéricas e não numéricas; - Representar simbolicamente relações descritas em linguagem natural e reciprocamente; - Interpretar diferentes representações de uma relação e relacioná-las.	Grupos de 3 ou 4 alunos	90 + 90	2
Ficha 3	• Polígonos regulares e irregulares • Área do triângulo	- Determinar o perímetro de polígonos regulares; - Compreender a noção de equivalência de figuras planas e distinguir figuras equivalentes e figuras congruentes; - Relacionar a fórmula da área do triângulo com a do retângulo; - Calcular a área de figuras planas simples, decomponíveis em retângulos e em triângulos ou por meio de estimativas.	Pares	90 + 45	1,5
Ficha 4	• Perímetros • Áreas: equivalência de figuras planas; unidades de área e área do triângulo	- Determinar o perímetro de polígonos regulares e irregulares; - Resolver problemas envolvendo perímetros de polígonos; - Resolver problemas que envolvam áreas do triângulo, bem como a decomposição de outras figuras planas; - Calcular a área de figuras planas simples, decomponíveis em	Individual	45 + 90	1,5

		retângulos e em triângulos ou por meio de estimativas; - Distinguir figuras equivalentes de figuras congruentes.			
Ficha 5	• Perímetros: círculo	- Determinar um valor aproximado de π; - Resolver problemas envolvendo perímetro do círculo.	Pares	90	1
Ficha 5 A	• Perímetros: círculo	- Resolver problemas envolvendo perímetro do círculo.	Individual	90	1
Ficha 6	• Áreas: área do círculo	- Determinar valores aproximados da área de um círculo desenhado em papel quadriculado; - Resolver problemas que envolvam áreas do círculo.	Pares	90	1
Ficha 7	• Áreas: área do círculo	- Compreender a noção de equivalência de figuras planas; - Calcular a área de figuras planas simples decomponíveis em retângulos e triângulos; - Relacionar a fórmula da área do retângulo com a do círculo.	Pares	90	1
Teste final	• Perímetros e áreas	Avaliar as aprendizagens desenvolvidas durante a unidade de ensino.	Individual	45	0,5

Ficha de trabalho 2

Esta ficha de trabalho contempla duas tarefas. Com a primeira pretendo que os alunos investiguem o que acontece à medida da área de um retângulo quando de alteram as suas dimensões (comprimento e largura) mas não se altera o perímetro. O seu principal objetivo é levar os alunos a distinguir e, sobretudo, a relacionar duas grandezas num contexto de resolução de problemas. É expectável que os alunos verifiquem que quanto maior é a diferença entre os valores das dimensões do retângulo, menor é a medida da sua área, e que figuras com o mesmo perímetro podem ter diversas medidas de área. Os alunos poderão fazer experiências recorrendo a diversos recursos como o papel quadriculado, geoplano e calculadora, fixando o valor do perímetro e fazendo variar a medida da área.

Na segunda tarefa, proponho que os alunos investiguem o que acontece à medida da área e do perímetro quando se duplicam as suas dimensões. A busca e compreensão de relações e distinção entre área e perímetro estão presentes nesta ficha cujos objetivos são: (i) determinar o perímetro de polígonos regulares; (ii) identificar sequências e regularidades numéricas e não numéricas; (iii) representar simbolicamente relações descritas em linguagem natural e reciprocamente; (iv) interpretar diferentes representações de uma relação e relacioná-las; (v) formular e testar conjeturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais; e (vi) discutir resultados, processos e ideias matemáticas.

Ficha de trabalho 3

Esta ficha de trabalho também contempla duas tarefas em que na primeira é objetivo que os alunos tracem alturas de triângulos para que saibam distinguir a altura dos lados inclinados do triângulo e para que se apercebam que num triângulo podemos traçar três alturas. Na segunda tarefa é, então, introduzida a fórmula da área do triângulo, tendo por base o conhecimento prévio da fórmula da área do retângulo. Proponho que os alunos atinjam os seguintes objetivos: (i) compreender relações entre elementos de um triângulo; (ii) determinar o perímetro de polígonos regulares e irregulares; (iii) compreender a noção de equivalência de figuras planas e distinguir figuras equivalentes de figuras congruentes; (iv) relacionar a fórmula da área do triângulo com a do retângulo; (v) calcular a área de figuras planas simples, decomponíveis em triângulos ou por meio de estimativas; (vi) formular e testar conjeturas e generalizações e justificá-las, fazendo deduções informais; e (vii) discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Ficha de trabalho 4

Esta ficha de trabalho tem como finalidade rever, trabalhar e consolidar os tópicos abordados nas fichas de trabalho anteriores, individualmente, com a resolução de exercícios e problemas do manual adotado pela escola. Os objetivos propostos para esta ficha de trabalho são: (i) determinar o perímetro de polígonos regulares e irregulares; (ii) calcular a área de figuras planas simples; (iii) compreender a noção de equivalência de figuras planas e distinguir figuras equivalentes e figuras congruentes; e (iv) resolver problemas envolvendo perímetros e áreas de polígonos.

Ficha de trabalho 5

Com a tarefa proposta nesta ficha de trabalho pretendo que os alunos, a partir da medida do perímetro e do diâmetro de vários círculos construídos com o GeoGebra, cheguem a um valor aproximado da constante π e à fórmula que permite determinar o perímetro do círculo. Os objetivos propostos para a tarefa são: (i) determinar um valor aproximado de π; (ii) resolver problemas envolvendo perímetro do círculo; (iii) explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos; (iv) interpretar informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas; (v) exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios; e (vi) discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Ficha de trabalho 5 A

Esta ficha não estava prevista inicialmente e surgiu durante unidade de ensino com o objetivo de propor aos alunos um conjunto de tarefas do manual escolar para rever e consolidar o perímetro do círculo, assunto onde os alunos revelaram ter algumas dificuldades. Os objetivos propostos para esta ficha de trabalho são: (i) resolver problemas envolvendo o perímetro do círculo; (ii) explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos; e (iii) discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Ficha de trabalho 6

Esta ficha de trabalho dá ênfase à determinação de um valor aproximado da área do círculo desenhado em papel quadriculado, recorrendo a materiais concretos como o compasso, régua e papel quadriculado. Assim foram definidos os seguintes objetivos: (i) determinar valores aproximados da área de um círculo desenhado em papel quadriculado; (ii) determinar a área de um círculo conhecido o raio ou o diâmetro; (iii) resolver problemas que envolvam área do círculo; (iv) exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios; e (v) discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Ficha de trabalho 7

Esta ficha de trabalho contempla a determinação da área do círculo, a partir da área do retângulo, com o auxílio de um círculo de cartolina dividido em setores, que os alunos poderão manipular. Os seus objetivos de aprendizagem são: (i) compreender a noção de equivalência de figuras planas; (ii) calcular a área de figuras planas simples decomponíveis em retângulos e triângulos; (iii) relacionar a fórmula da área do retângulo com a do círculo; (iv) formular e testar conjeturas e generalizações e justificá-las, fazendo deduções informais; (v) representar informação e ideias matemáticas de diversas formas; (vi) exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios; e (vii) discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Origem das tarefas

As fichas de trabalho 1, 3, 5 e 7 contêm tarefas adaptadas da brochura para o 2.º ciclo, retirada do sítio da DGIDC, com a sequência de tarefas para apoiar o professor na exploração do tema áreas e perímetros do *Programa de Matemática do Ensino Básico,* cuja proposta seguiu as recomendações sugeridas pelos autores. As tarefas 1, 3 e 5 foram adaptadas para serem executadas com o auxílio do *GeoGebra.* A ficha de trabalho 2 contém tarefas adaptadas da brochura *Geometria e Medida no Ensino Básico* (Breda, Serrazina, Menezes, Sousa e Oliveira, 2011). As fichas 4 e 5 A contêm tarefas retiradas do manual de Matemática do 5.º ano, *Olá Matemática!* (Sequeira et al., 2010), adotado pela escola onde se realizará a investigação. A ficha 6 contempla tarefas do manual de Matemática do 5.º ano da Texto Editores, *MATemática 5.º Ano* (Durão e Baldaque, 2010).

Capítulo 4

Metodologia de Investigação

Neste capítulo apresento as opções metodológicas gerais desta investigação, que segue uma abordagem qualitativa e interpretativa. Também apresento as fases do estudo, bem como os processos de seleção dos participantes e os procedimentos de recolha e análise de dados.

4.1. Opções metodológicas gerais

Investigação qualitativa e interpretativa. A presente investigação assume uma abordagem qualitativa de paradigma interpretativo. De acordo com Lessard-Hébert, Goyette e Boutin (1990), um investigador segue o paradigma interpretativo quando se pretende questionar, por exemplo, acerca dos significados que os alunos e os docentes podem criar em conjunto no processo de ensino-aprendizagem. Deste modo, a investigação incide no modo como os significados são desenvolvidos e mantidos. Estes autores apontam que a investigação interpretativa tem frequentemente três campos de interesse, a natureza da sala de aula como um meio social, a natureza do ensino e a natureza e conteúdo das perspetivas e significados dos professores e alunos como participantes do processo educativo.

Investigação da própria prática. Esta investigação decorre na minha prática profissional, na sala da aula, como professora de Matemática de uma turma do 5.º ano do ensino básico. A sala de aula representa o "palco" onde tem lugar o processo de ensino-aprendizagem onde, como acontece com a maioria dos professores, especialmente aqueles que têm pouca experiência profissional, por vezes, surgem situações para as quais não tenho resposta imediata. Daí, o meu interesse em investigar e procurar respostas para os problemas da minha prática. Sinto necessidade de compreender as dificuldades e os processos que os meus alunos utilizam para poder proporcionar experiências de aprendizagem que permitam obter os resultados desejados em termos de sucesso escolar. Tal como refere Ponte (2008), os professores defrontam-se com uma grande variedade de problemas de natureza diversa na sua prática quotidiana pelo que têm vindo a pesquisar diretamente os problemas com os quais se confrontam.

A busca do conhecimento da própria prática pode ser importante por vários motivos como sejam o esclarecimento e resolução de problemas, o contributo que dá ao desenvolvimento profissional, ajudar a melhorar as organizações onde um profissional se insere e até contribuir para o desenvolvimento da cultura profissional com impacto na sociedade em geral (Ponte, 2002). Deste modo, como indica Ponte (2008), a investigação do professor sobre a sua prática revela-se fundamental para a construção do conhecimento acerca dessa prática, para os professores que a fazem, podendo ainda contribuir para esclarecer os problemas da prática e procurar soluções. Como refere o autor, tal processo pode ter dois objetivos: (i) intervir no sentido de alterar algum aspeto da sua prática e (ii) procurar compreender a natureza dos problemas com os quais se defronta para mais tarde elaborar as estratégias de ação mais adequadas. No estudo que pretendo realizar procuro compreender a natureza dos problemas que se colocam na minha prática, associados à aplicação de um conjunto de tarefas no quadro de uma unidade de ensino.

Experiência de ensino. Este estudo tem por base uma experiência de ensino. De acordo com Steffe e Thompson (2000), a metodologia de experiência de ensino tem as suas raízes na Educação Matemática e caracteriza-se globalmente por procedimentos padronizados, onde o investigador constrói estratégias para conhecer a matemática dos alunos. Ainda segundo estes autores, um dos propósitos da metodologia de experiência de ensino é proporcionar ao investigador experimentar em primeira mão a aprendizagem matemática e raciocínio dos alunos. Sem as experiências de ensino não haveria base para compreender os conceitos e operações matemáticas mais fortes que os alunos constroem ou mesmo suspeitar que esses conceitos e operações podem ser diferentes dos do investigador. As "restrições" que os investigadores experienciam constituem a base para compreender as construções matemáticas dos alunos. Estes autores indicam, ainda, que uma experiência de ensino envolve uma sequência de episódios de ensino, podendo incluir um agente de ensino, um ou mais alunos, uma testemunha dos episódios de ensino e um método de gravação do mais importante durante o episódio.

Estudo de caso. A modalidade de investigação é o estudo de caso. Segundo Ponte (2006), um estudo de caso “visa conhecer uma entidade bem definida” (p. 2) e tem como objetivo “compreender em profundidade o “como” e os “porquês” dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspetos que interessam ao pesquisador” (p. 2). Para o autor, este tipo de investigação tem essencialmente três características: (i) “é uma investigação de natureza empírica. Baseia-se em trabalho de campo ou em análise documental. Estuda uma dada entidade no seu contexto real, tirando partido de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações, documentos e artefactos” (p. 7); (ii) “não é uma investigação experimental. Usa-se quando o investigador não pretende modificar a situação, mas compreendê-la tal como é” (p. 8); e (iii) “os resultados podem ser dados a conhecer de diversas maneiras, no entanto assume com frequência a forma de narrativa cujo objetivo é contar uma história que acrescente algo significativo ao conhecimento existente e seja tanto quanto possível interessante e iluminativa” (p. 10). Matos e Carreira (1994) defendem que o estudo de caso é adequado quando o fenómeno de estudo não se pode isolar do contexto, sendo um meio de investigar fenómenos contidos em unidades sociais complexas que incluem múltiplos elementos potencialmente importantes para a compreensão desse fenómeno. Sendo o objeto do estudo as aprendizagens dos alunos no quadro de uma experiência de ensino, considero adequado usar a modalidade de estudo de caso.

4.2. Participantes

Turma objeto de estudo. Os alunos que irão participar no estudo pertencem a uma turma do 5.º ano de escolaridade de uma escola básica do ensino público. A turma é constituída por vinte e oito alunos, dos quais dezasseis são rapazes e doze são raparigas com idades compreendidas entre os dez e os catorze anos, a maioria (dezoito alunos) com dez anos. Há nove alunos repetentes neste ano de escolaridade. A maioria dos alunos é proveniente de escolas do 1.º ciclo pertencentes ao agrupamento. A classe socioeconómica das famílias é, no geral, baixa ou média-baixa, sendo que dezassete alunos da turma beneficiam de Ação Social Escolar (ASE), dez alunos no escalão A e sete no escalão B. O agregado familiar é, em média, constituído por três ou quatro elementos. As habilitações académicas dos encarregados de educação situam-se na sua maioria ao nível do 3.º ciclo e ensino secundário.

No inquérito aplicado aos alunos, a maioria não referiu a profissão desejada. A maioria dos alunos refere que gosta de ocupar os tempos livres a ver televisão, brincar, conversar com os amigos, passear e jogar computador, especialmente aos fins de semana. Alguns alunos manifestam ter preferência pela disciplina de Matemática, sendo as disciplinas onde referem ter mais dificuldades a Língua Portuguesa e o Inglês. A turma tem duas alunas com necessidades educativas especiais, uma das quais frequenta a Unidade de Apoio a Alunos com Multideficiência (UAAM) e não frequenta as aulas, pelo que não irá participar no estudo. Assim sendo, a participar diretamente no estudo estarão apenas vinte e sete alunos.

No que diz respeito ao aproveitamento, é uma turma que revela, na sua maioria, falta de hábitos e métodos de trabalho, nomeadamente de trabalho em pares. É recetiva a novos tipos de tarefa e mantém um ritmo de trabalho lento e alguma falta de autonomia. O conselho de turma considerou insatisfatório o aproveitamento global no primeiro período, uma vez que mais de cinquenta por cento dos alunos (quinze alunos) obtive nível inferior a três em uma ou mais disciplinas. Na disciplina de Matemática apenas dez alunos tiveram nível inferior a três. No que respeita ao segundo período, dezanove alunos (dos 27 alunos avaliados) tiveram três ou mais negativas, pelo que o aproveitamento foi considerado pelo conselho de turma como fraco. Na disciplina de Matemática tiveram nível inferior a três, catorze alunos. Existe um pequeno grupo de alunos empenhados e com bom aproveitamento e existe um conjunto bastante mais amplo de alunos com dificuldades. Embora alguns alunos sejam empenhados, a maioria dos alunos deste grupo apresenta elevado desinteresse pelas atividades escolares.

Relativamente ao comportamento, o conselho de turma considerou-o pouco satisfatório no primeiro período e insatisfatório no segundo período, tendo em conta que vários alunos desrespeitam as regras de funcionamento da sala de aula e que houve mais participações disciplinares no segundo período, onde os alunos estiveram muito mais agitados e menos empenhados. Há sete alunos que apresentam faltas disciplinares, dois dos quais já foram suspensos por um ou dois dias (por motivos de agressividades para com colegas) mas não posso considerar que existam situações graves de indisciplina. Os alunos tentam participar mas fazem-no de forma muito desorganizada e são muito precipitados nas suas respostas, o que provoca alguma confusão nas aulas. São extremamente conversadores e distraem-se com muita facilidade, começando a cantarolar (embora baixinho) e a conversar ou discutir com os colegas da outra ponta da sala, levantando-se por vezes sem autorização do professor. A maior parte dos encarregados de educação aparentam preocupar-se com a vida escolar dos seus educandos, mas nem sempre os conseguem acompanhar academicamente ou controlar o seu trabalho e organização em casa.

Para além de ser a professora de Matemática desta turma, sou também a diretora de turma e professora de Ciências da Natureza, Educação e Cidadania e Apoio ao Estudo, estando assim com os alunos onze tempos (de 45 minutos) por semana. Devido ao facto de passarmos muito tempo juntos e de ser a diretora de turma, temos uma relação bastante próxima, os alunos vêem-me como uma referência e o seu maior apoio dentro da escola para os ajudar a resolver problemas quer nas disciplinas que leciono quer nas restantes disciplinas e nos intervalos, mas também problemas da sua integração social na escola e pessoais. Também mantenho contactos frequentes com os seus encarregados de educação, o que me ajudou a conhecê-los melhor, bem como as suas situações económicas e sociofamiliares. Foi devido a esta proximidade e conhecimento que tenho destes alunos que selecionei a turma para participar no estudo.

Alunos objeto de estudo de caso. Neste estudo, proponho dois alunos para serem objeto de estudo de caso. Para essa escolha defini as seguintes condições: (i) possuir uma razoável capacidade de expressão oral e escrita para que seja capaz de justificar e comunicar as suas resoluções, bem como argumentar as suas descobertas; (ii) ter facilidade e autorização para reunir fora das aulas e (iii) mostrar predisposição para participar no estudo. Ambos os alunos satisfazem as condições anteriores mas, para melhor fundamentar a análise de dados e diversificar a recolha, os alunos estudo de caso apresentam género sexual distinto e apresentam níveis de desempenho diferente. A aluna é Mariana que mostrou, desde logo, interesse em participar no estudo, demonstra um bom desempenho ao nível da disciplina de Matemática e tem uma boa capacidade de comunicação oral e escrita. O aluno é João e também revelou interesse e disponibilidade em participar mas tem revelado um desempenho mais fraco que Mariana, apesar de ser um aluno organizado, empenhado e com boa expressão oral e escrita. Prevejo a realização de duas entrevistas, uma antes e outra depois da realização da unidade de ensino.

4.3. Fases do estudo

O estudo será desenvolvido entre outubro de 2012 e outubro de 2013, iniciando-se com a revisão de literatura relativa ao tema em estudo e às metodologias de investigação em educação. A segunda fase do estudo prende-se com a preparação dos instrumentos de recolha de dados, conceção da unidade de ensino, sua planificação e elaboração de tarefas e a criação de condições necessárias para o desenvolvimento do estudo. Seguem-se a recolha e análise de dados, acompanhadas de novo aprofundamento teórico, tendo por base as questões da investigação e a teoria existente sobre a temática abordada. A calendarização prevista para as diversas fases do estudo encontra-se resumida no quadro 2.

Quadro 2 – Fases do estudo

Atividades	2012		2013								
	out.-nov.	dez.	jan.	fev.	mar.	abr.	mai.	jun.-jul..	ago.	set.	out.
Revisão de literatura	x	x	x	x	x	x	x		x	x	
Conceção de instrumentos e da unidade de ensino		x	x	x							
Recolha de dados					x	x					
Análise de dados					x	x	x	x	x		
Produção/divulgação							x	x	x	x	x

No que respeita à recolha de dados, há quatro etapas principais. A primeira etapa é constituída por um pré-teste (diagnóstico) e uma primeira entrevista a fim de aferir os conhecimentos prévios dos alunos e conhecer algumas das suas dificuldades. A segunda corresponde à realização da experiência de ensino. A terceira etapa é constituída por um teste final de unidade para avaliar as aprendizagens e uma segunda entrevista. A quarta e última etapa é constituída por um pós-teste, com questões do teste diagnóstico e do teste final, a realizar cerca de um mês após o teste final, com o objetivo de reconhecer ou não a eficácia, a longo prazo, das tarefas da unidade de ensino na aprendizagem dos alunos. No quadro 3 está representada a minha programação para as diversas etapas da recolha de dados, com a especificação das datas prováveis para cada fase e os documentos/meios utilizados na recolha.

Quadro 3 – Etapas da recolha de dados

Teste diagnóstico	1.ª Entrevista	Realização da unidade de ensino	Teste final	2.ª Entrevista
01/03/2013	01/03/2013	05/03/2013 a 19/04/2013	26/04/2013	01/05/2013
Produções escritas dos alunos	Gravação vídeo e áudio	• Gravação vídeo e áudio • Diário de bordo • Produções escritas dos alunos	Produções escritas dos alunos	Gravação em vídeo e áudio

4.4. Recolha de dados

A recolha de dados teve três momentos principais – antes, durante e após a realização da unidade de ensino.

Instrumentos de recolha de dados

A recolha de dados foi efetuada de modo a obter informação diversificada relativa às questões do estudo, fazendo uma descrição detalhada e com profundidade. Foram utilizados os seguintes instrumentos: (i) observação de aulas, com registo de notas de campo; (ii) entrevistas; e (iii) análise documental.

Observação. A observação é um instrumento que permite recolher informação direta e em primeira mão sobre o objeto em estudo. Assim, um dos métodos de recolha de dados adequado a esta investigação é a *observação participante*. Como professora e investigadora, fui eu a recolher diretamente os dados, por observação participante no ambiente natural dos alunos. Deste modo, as ações dos participantes foram observadas no ambiente natural dos mesmos, para facilitar a compressão da situação atual (Bogdan & Biklen, 1994). Usei a informação dos órgãos sensoriais para retirar informação importante e recorri à teoria e à metodologia científica para poder descrever, interpretar e agir sobre a realidade das minhas aulas (Carmo & Ferreira, 1998). Como vantagens desta abordagem metodológica são de referir a oportunidade de recolher dados importantes e detalhados, resultantes da observação de contextos naturais e a possibilidade de obtenção de relatos de situações na própria linguagem dos participantes, o que dá acesso aos conceitos que eles usam no quotidiano.

Nesta investigação, a observação tem como objetivo compreender as aprendizagens e as dificuldades manifestadas pelos alunos durante a realização das tarefas, para que seja possível perceber como estes estruturam o seu pensamento e inter-relacionam as suas aprendizagens. Como formas de registo da observação utilizei o diário de bordo, onde registei a forma como os alunos aderiram às tarefas, bem como o modo como decorreu a aula, permitindo-me reestruturar e adequar o processo de implementação da unidade de ensino. O diário de bordo constitui o instrumento "onde o investigador regista os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, bem como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo" (Ponte, 2002, p. 18). Bogdan e Biklen (1994) referem-se ao registo de ideias, estratégias, reflexões, palpites e padrões que possam emergir como notas de campo da observação. De acordo com estes autores, um resultado bem-sucedido de um estudo de observação participante baseia-se em notas de campo detalhadas e precisas. Para além do registo em diário de bordo (Anexo 19), fiz gravações vídeo e áudio das aulas da experiência de ensino, a fim de captar aspetos que podiam passar despercebidos, tendo em conta o meu papel de professora/investigadora, o que dificultou a tarefa de me focar unicamente num determinado grupo de trabalho, pois tive de acompanhar o trabalho de toda a turma.

Entrevistas. A entrevista pode ser entendida como "uma forma especial de comunicação entre pessoas" (Anderson & Arsenault, 2002, p. 190) tendo subjacente um determinado assunto e propósito. De acordo com Bogdan & Biklen (1994), a entrevista consiste numa conversa intencional dirigida por uma das pessoas com o intuito de obter informações sobre a outra, é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito e, simultaneamente, permite ao investigador desenvolver uma ideia sobre o modo como os sujeitos interpretam determinada situação, além de permitir a captação direta da informação desejada. De acordo com Anderson e Arsenault (2002), as principais vantagens das entrevistas são: (i) as pessoas envolvem-se mais facilmente na entrevista do que, por exemplo, a completar um questionário, ocorrendo menos problemas com a falha ou falta de respostas, (ii) o entrevistador pode clarificar as perguntas e as respostas do entrevistado, tendo acesso a informações mais completas e (iii) permite ao entrevistador captar pistas não-verbais como as expressões faciais e o tom de voz.

De acordo com Gay et al. (2006) as entrevistas podem ser distinguidas pelo seu grau de formalidade e estrutura. Podem ser formais e planeadas, com hora marcada, ou informais e não planeadas, surgindo, por exemplo, de um encontro casual. Algumas entrevistas são estruturadas com um conjunto específico de questões previamente preparadas, enquanto outras não são estruturadas, sendo que, as questões vão surgindo no decorrer da entrevista. Gay et al. (2006) também se referem às entrevistas semiestruturadas, considerando-as como aquelas que combinam as entrevistas estruturadas com as não estruturadas. Neste estudo foram utilizadas entrevistas semiestruturadas, com base num conjunto de questões definidas *a priori* para serem dirigidas de modo flexível, introduzindo por vezes novas perguntas, considerando as respostas fornecidas pelos alunos, de modo a obter informação sobre o seu raciocínio.

Com as entrevistas pretendo conseguir elementos sobre a capacidade dos alunos estudo de caso para: (i) lidarem com o conceito de perímetro; (ii) determinarem o perímetro de figuras; (iii) lidarem com o conceito de área; (iv) determinarem a área de figuras; (v) distinguirem perímetro de área e (vi) resolverem problemas que envolvam perímetros e/ou áreas. Também pretendo compreender as estratégias que os alunos utilizam e as dificuldades que demonstram na resolução das tarefas que irei propor. Foram realizadas duas entrevistas, uma inicial após o teste diagnóstico e uma após o teste realizado no final da unidade.

As entrevistas incidiram essencialmente nas tarefas realizadas e foram realizadas numa sala de aula, fora do horário letivo da turma para decorrerem com a calma e tranquilidade necessárias. Os alunos entraram na sala onde se realizaram as entrevistas, com o seu material de escrita e uma calculadora (foram informados que a entrevista seria gravada). Durante a entrevista e em cada uma das tarefas solicitei que explicassem e justificassem, oralmente e por escrito, a resolução realizada, procurando, em particular, que explicitassem os processos utilizados e os cálculos efetuados em cada uma das tarefas. As entrevistas foram áudio-gravadas e transcritas na íntegra. Como apoio para a análise e condução das entrevistas, elaborei um guião (Anexos 13 e 15).

Análise documental. Procurei analisar os trabalhos escritos realizados pelos alunos nas diversas tarefas do estudo para obter mais elementos para compreender os processos e estratégias que utilizam, bem como os erros que cometem e as dificuldades que apresentam. As entrevistas e os testes foram os principais elementos de recolha de dados como forma de verificar as aprendizagens realizadas pelos alunos. Os restantes processos de recolha de dados ajudaram-me a perceber melhor as aprendizagens realizadas e puderam contribuir para perceber os efeitos que a unidade de ensino que preparei teve nas aprendizagens dos alunos e respetiva compreensão dos conceitos de perímetro e área.

A análise documental foi, também, utilizada para recolher dados sobre a caracterização da escola e comunidade escolar e de alguns aspetos da caracterização da turma. As informações contidas nos documentos oficiais podem fornecer elementos sobre o modo de funcionamento e de organização de determinadas estruturas, permitindo revelar novos aspetos do problema em estudo (Bogdan & Biklen, 1994). Para a caracterização da turma foram utilizadas as fichas biográficas dos alunos relativas a dados pessoais (idades, residência, agregado familiar) e ao seu percurso escolar (número de retenções, aulas de apoio a Matemática, planos de recuperação e acompanhamento), realizadas para serem inseridas no dossiê de turma e constantes do processo individual dos alunos. Como documentos complementares, e sendo eu professora de Matemática e diretora de turma dos alunos em estudo, recorri aos resultados dos alunos nos vários momentos de avaliação, formativa e sumativa como sendo fichas de trabalho utilizadas nas aulas e testes de avaliação, ao longo do primeiro e segundo períodos.

Testes. Antes da implementação das tarefas da unidade de ensino senti necessidade de realizar um teste de diagnóstico para aferir os conhecimentos formais e informais dos alunos sobre áreas e perímetros e recolher dados para posterior comparação. Este teste foi realizado na semana anterior ao início da implementação da unidade de ensino, numa aula de 45 minutos, inserida num bloco de 90 minutos, onde propus aos alunos um conjunto de tarefas (Anexo 12) sobre o cálculo de perímetros e áreas de figuras e a distinção entre os conceitos de área e perímetro.

O teste final (Anexo 17) teve como objetivo avaliar e verificar as aprendizagens dos alunos adquiridas durante a experiência de ensino. Este teste foi elaborado em conformidade com o teste de diagnóstico, seguindo uma estrutura semelhante mas com questões mais complexas e envolvendo os tópicos trabalhados durante as tarefas propostas na unidade de ensino.

Pedidos de autorização. Comecei por pedir autorização ao diretor da escola/agrupamento para a realização do estudo (Anexo 10), que me foi prontamente concedida, desde que os encarregados de educação também anuíssem. Posteriormente, informei a coordenadora do departamento e a coordenadora do grupo disciplinar de Matemática da realização deste estudo. Por último, pedi autorização aos encarregados de educação (Anexo 11) para a realização da investigação com os seus educandos e também para a gravação em áudio e vídeo das aulas e entrevistas, como forma de recolha de dados, garantindo o anonimato dos alunos e o uso das imagens exclusivamente para a investigação. Todos os encarregados de educação autorizaram a participação dos seus educando no estudo.

4.5. Análise de dados

A análise de dados constituiu, essencialmente, uma análise de conteúdo, visando identificar aspetos relevantes, relativamente a cada uma das questões do estudo, para os organizar em categorias, tal como nos refere Bogdan & Biklen (1994). Segundo estes autores, a análise de dados é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais acumulados com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses materiais, a fim de poder apresentar aos outros aquilo que encontrou.

> A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspetos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros. (p. 205)

Assim sendo, a análise numa investigação desta natureza tem, essencialmente, um sentido de construção de significado, a partir dos dados recolhidos durante as entrevistas, durante a interação verbal com os alunos e a partir da análise das suas produções escritas na realização das tarefas e testes. Devido à natureza do estudo, a análise de dados assumiu um caráter essencialmente descritivo e interpretativo e iniciou-se logo após os primeiros momentos do trabalho de campo, tendo acompanhado a recolha de dados.

O processo de recolha de dados produziu uma grande quantidade de informação, pelo que senti necessidade de a organizar. Procedi à transcrição integral das gravações vídeo das entrevistas e estabeleci categorias de análise que me permitissem responder às questões do estudo. Tendo em conta a revisão da literatura e os objetivos do estudo considerei as seguintes categorias de análise: (i) dificuldades e erros mais significativos que os alunos cometem no trabalho com perímetros; (ii) dificuldades e erros mais significativos no trabalho com áreas; e (iii) dificuldades e erros mais significativos na distinção de área e perímetro. Em cada categoria definiram-se subcategorias, que emergiram da análise dos dados. Esta categorização foi utilizada tanto na análise do percurso da turma, como na elaboração dos estudos de caso. Em relação às aulas, onde foram implementadas as várias tarefas da unidade de ensino, para além das gravações em vídeo foram realizados registos escritos com o auxílio de um diário de bordo. Os registos foram organizados em torno dos seguintes itens: (i) antes da aula; (ii) durante a aula, incluindo a introdução e desenvolvimento da tarefa e a discussão geral; e (iii) após a aula, com reflexão dos aspetos melhor ou pior conseguidos. A análise destes registos escritos e gravações em vídeo contribuiu para perceber melhor as dificuldades e o raciocínio dos alunos nas várias tarefas envolvendo perímetros e áreas.

Capítulo 5

O Trabalho da Turma

Este capítulo apresenta a estrutura das aulas, a realização de todas as fichas de trabalho e o desempenho dos alunos nos testes (diagnóstico e final). Também apresenta a análise do trabalho da turma no que respeita a tarefas envolvendo os conceitos de perímetro e área e termina com um balanço global das aprendizagens dos alunos.

5.1. Estrutura das aulas

A turma de 5.º ano que participou no estudo é constituída por 27 alunos que costumam ser participativos e têm um papel ativo nas aulas de Matemática, embora sejam desorganizados na sua participação oral. Desde o início do ano letivo trabalham geralmente aos pares ou individualmente, daí ter escolhido formar pares de alunos para a realização da maioria das tarefas. Assim, os dados aqui apresentados resultam da troca de ideias entre dois alunos, exceto os dados relativos à ficha de trabalho 2, que foi realizada em grupos de quatro ou cinco alunos. Em cada aula distribuí a tarefa a realizar e indiquei o trabalho a desenvolver. Nas situações em que os alunos revelaram mais dificuldade começámos com a interpretação do enunciado da tarefa e, a partir daí, os alunos desenvolveram o seu trabalho. Durante a aula fui acompanhando o trabalho de cada grupo e tirando as dúvidas que foram surgindo. No final da realização de cada ficha de trabalho foi feita uma discussão com toda a turma, tendo os diferentes grupos apresentado e discutido as conclusões obtidas.

As tarefas das fichas de trabalho nem sempre foram discutidas no dia em que foram feitas, uma vez que houve casos onde foi necessário ocupar mais do que um bloco para a realização de uma dada tarefa. No entanto, foi minha preocupação rever muito bem o trabalho iniciado na aula anterior e averiguar se já tinham surgido algumas conclusões com o intuito de reavivar a memória dos alunos e incentivar o registo completo de conclusões na continuação da tarefa, pois os alunos, nestas idades, ainda não conseguem fazer registos muito elaborados das suas resoluções. Nas discussões finais, geralmente, um grupo apresentava as suas conclusões aos colegas, explicando o que fez e esclarecendo eventuais dúvidas, caso existissem. Os outros grupos apresentavam as estratégias ou conclusões diferentes que tenham obtido ou completavam as conclusões que o primeiro grupo tinha apresentado.

Ao longo da unidade de ensino surgiram muitas situações de aprendizagem e de partilha de conhecimentos, por isso não apresento uma descrição exaustiva de todos os momentos vividos nas aulas, referindo apenas as situações que levaram a novos conhecimentos ou episódios especialmente marcantes no desenvolvimento das noções de perímetro e área e na distinção entre os dois conceitos no trabalho com figuras regulares e irregulares, nomeadamente o triângulo e o círculo.

Assim, começo por fazer uma apresentação do trabalho desenvolvido na aula e dos momentos que se destacaram na realização e discussão das tarefas. Apresento, também, alguns episódios de cada aula, com respetiva reflexão/análise, selecionados pela sua pertinência na aprendizagem dos alunos. A unidade de ensino foi realizada em 28 aulas de 45 minutos (2 aulas foram dedicadas à realização dos testes). A unidade é constituída por um conjunto de oito fichas de trabalho preparadas para abranger todos os assuntos programáticos do tema Perímetros e Áreas do Programa de Matemática do Ensino Básico, no que respeita ao 2.º ciclo e com a preocupação e rever e reforçar as aprendizagens iniciadas no 1.º ciclo. O quadro 4 apresenta as várias tarefas com a respetiva data de realização.

5.2. A realização das fichas de trabalho

5.2.1. Ficha de trabalho 1

A primeira aula desta unidade de ensino realizou-se no dia 5 de março de 2013, tendo por objetivo rever as noções de perímetro e área e distinguir os dois conceitos, que foram trabalhados no 1.º ciclo, partindo da resolução de duas tarefas que envolviam terrenos e utilizando o software GeoGebra. Para preparar os alunos para o trabalho com este software de geometria dinâmico fiz uma pré-aula na semana anterior, onde os alunos, em grupos de dois e com o meu apoio, o exploraram livremente e fizerem várias construções. Desta forma, experimentaram algumas das potencialidades do programa e exploraram a barra de ferramentas, contatando com as suas várias opções e potencialidades.

Quadro 4 – Aplicação das fichas de trabalho

Aula	Data	Tarefas realizadas
1ª	1 de março	Teste diagnóstico
2ª e 3ª	5 de março	Ficha de trabalho 1 – realização e discussão
4ª e 5ª	7 de março	Ficha de trabalho 2 – início da realização (tarefa 1)
6ª e 7ª	8 de março	Ficha de trabalho 2 – continuação da realização (tarefa 2)
8ª e 9ª	14 de março	Ficha de trabalho 2 – conclusão e discussão das tarefas 1 e 2
Interrupção letiva da Páscoa		
10ª e 11ª	2 de abril	Ficha de trabalho 3 – realização
12ª e 13ª	4 de abril	Ficha de trabalho 3 – conclusão
14ª e 15ª	5 de abril	Ficha de trabalho 3 – discussão Ficha de trabalho 4 – realização
16ª e 17ª	9 de abril	Ficha de trabalho 5 – realização
18ª e 19ª	11 de abril	Ficha de trabalho 5 – discussão Ficha de trabalho 5A – realização
20ª e 21ª	12 de abril	Ficha de trabalho 5A – conclusão e discussão
22ª e 23ª	16 de abril	Ficha de trabalho 4 – discussão
24ª e 25ª	18 de abril	Ficha de trabalho 6 – realização e início da discussão
26ª e 27ª	19 de abril	Ficha de trabalho 6 – conclusão da discussão Ficha de trabalho 7 – realização e discussão
28ª	26 de abril	Teste final

A aula correspondente à ficha de trabalho 1 iniciou-se com uma discussão geral acerca do tema áreas e perímetros. Listei, no quadro, as palavras que os alunos associavam a esta temática, o que se lembravam de ter trabalhado e aprendido no 1.º ciclo. O meu objetivo com esta discussão inicial, para além de introduzir o estudo do novo tema, era fazer um breve diagnóstico das ideias e dificuldades dos alunos no que respeita aos conceitos de perímetro e área.

Os alunos que participaram dando as suas ideias referiram-se a unidades de medida como centímetros quadrados e metros quadrados, bem como aos termos comprimento, largura e altura e à necessidade do uso da tabuada. Como forma de obter o perímetro os alunos referiram três ideias principais: usar a multiplicação ou multiplicar a largura pelo comprimento, usar a adição ou somar todos os lados e descobrir o que está à volta. Para obter a área os alunos referiram duas ideias: descobrir o que está por dentro ou multiplicar a medida dos lados do perímetro pelo outro lado. Estas ideias revelam alguma discórdia entre os alunos e alguma confusão entre perímetro e área, já que algumas crianças referiram que se podia obter o perímetro multiplicando os lados ou que necessitavam da medida do perímetro para determinar a área. Quanto às unidades de medida só se referiram a unidades do sistema métrico.

Dando seguimento à aula, para resolverem a ficha de trabalho, os alunos organizaram-se em pares, à exceção de um grupo formado por três alunos, tendo-se constituído 12 grupos, porque dois alunos faltaram à aula. Entreguei um enunciado das tarefas (uma folha com frente e verso) a cada aluno e cada grupo ficou com um computador. As tarefas foram lidas e explicadas em voz alta e a imagem com elas relacionada já estava guardada no computador, para que os alunos a manipulassem sem ter de a construir de origem. Os alunos tiveram uma hora para completar as duas tarefas e o tempo restante do bloco foi ocupado com a discussão em grande grupo e registo, no quadro, das conclusões obtidas. Tal como previsto, a realização de discussão das duas tarefas da ficha de trabalho 1 ocupou um bloco de 90 minutos. A discussão coletiva das duas tarefas foi feita no final do bloco, uma seguida da outra.

Tarefa 1. Nesta tarefa (Que decisão deve o Senhor Alves tomar?) previ que os alunos tivessem alguma dificuldade em interpretar a questão e ficassem confusos com a palavra "vedar", pelo que fiz uma leitura e explicação inicial em grande grupo. Os alunos ficaram esclarecidos no que diz respeito ao termo "vedar" mas, devido à sua desconcentração demoraram muito tempo a iniciar a tarefa e não voltaram a ler o enunciado. Tive de reformular alguns grupos inicialmente formados e incentivar cada grupo a ler bem a tarefa, a tomar atenção apenas ao terreno das famílias Alves e Moura, a fazer as medições dos comprimentos, perímetro e área dos terrenos com o Geogebra e a registar as suas conclusões. Alguns alunos revelaram dificuldades em identificar, de imediato, a necessidade de descobrir o perímetro, usaram a medida de alguns lados em vez do perímetro, calcularam a perímetro de todos os terrenos, quando só era necessário o do Sr. Moura e do Sr. Alves.

Por fim, todos os grupos descobriram o valor do perímetro dos dois terrenos (Sr. Moura, 16, e Sr. Alves, 13) e compararam os valores ou dividiram por dois e verificaram que não deviam repartir a despesa a meio. Aquando da discussão final:

Ana: Ele não devia aceitar porque o perímetro não é igual.

Professora: Há algum grupo que não concorde com aquilo que a Ana disse?

Nenhum grupo se manifestou pelo que considero que todos os grupos concordaram. Verifica-se que os alunos conseguiram identificar o perímetro como medida necessária para resolver o seu problema e que, apesar de a área ser a mesma, o perímetro não era.

Tarefa 2. Nesta tarefa (Qual das famílias poderia dividir igualmente a despesa com o Sr. Moura de modo a que ninguém fique prejudicado?) os alunos já sabiam que era necessário determinar o perímetro. Os grupos que não tinham descoberto esse valor para todas as famílias, fizeram-no neste momento e facilmente descobriram que apenas o terreno do Sr. Esteves tinha o mesmo perímetro que o do Sr. Moura e, consequentemente, poderiam dividir a despesa a meio. Como exemplos ilustrativos apresento a imagem do computador de dois grupos, que inseriram texto na folha de trabalho do GeoGebra para responderem às questões (Figuras 7 e 8).

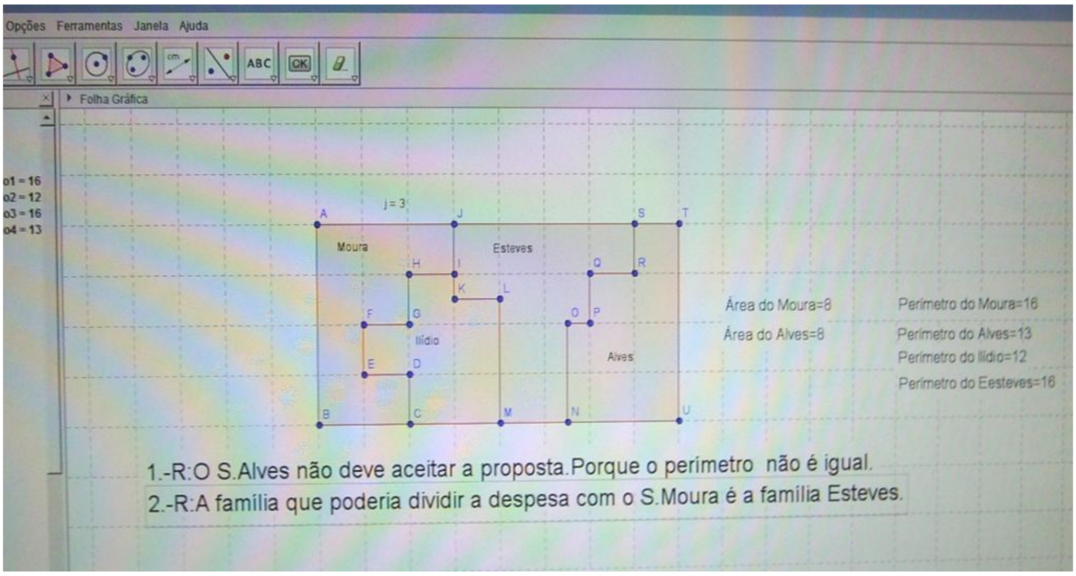


Figura 7. Ana Lia, Ana Filipa, FT1.

Ainda na discussão final das tarefas questionei os alunos acerca do que tinham aprendido durante a aula e se já conseguiam saber com certeza o que era o perímetro e a área. Registou-se o seguinte diálogo:

Professora: O que é que aprenderam com esta tarefa?

Lara: Aprendemos que devemos medir o terreno, o perímetro para comprar coisas para o nosso terreno.

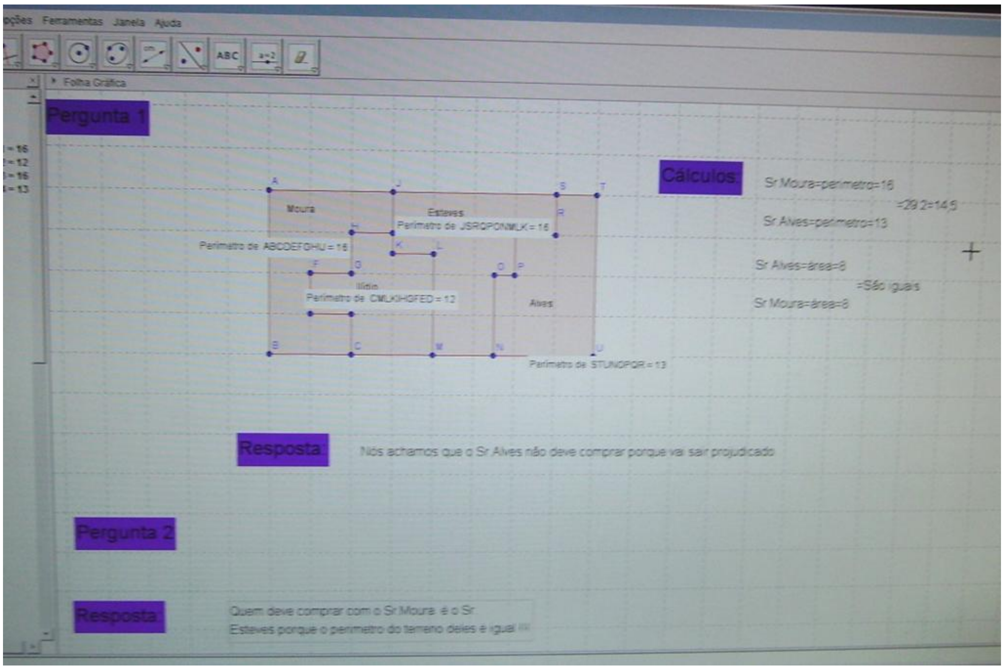


Figura 8. Mariana e Bárbara, FT1.

Professora: Mais coisas que aprenderam?

André: Se quisermos comprar uma vedação temos de calcular o perímetro e que lá por a área ser igual não quer dizer que o perímetro seja.

Professora: Muito bem. A área não é o mesmo que o perímetro e podem ser diferentes. Mais coisas que tenham aprendido? O que é o perímetro afinal?

João: É a parte de fora.

Professora: Que parte?

Após algumas sugestões de alguns alunos como vedação, rede, terreno, o diálogo continua:

Professora: Se eu não tiver um terreno, se eu tiver uma figura. O que é que é o perímetro numa figura?

Rodrigo: É o que está à volta.

Professora: É o que está à volta. E normalmente o que é que está à volta duma figura? O que é que eu estou a medir? O perímetro é uma medida de quê?

Nesta pequena discussão é possível verificar que alguns alunos já reconhecem que perímetro e área são grandezas distintas e que o perímetro pode ser útil na vedação de terrenos. Como não responderam às questões finais sugeri que revissem no Geogebra o que andaram a medir durante as tarefas. Os alunos verificaram que andaram a medir uma distância ou comprimento, pelo que terminei a discussão frisando que numa figura o perímetro correspondia ao comprimento da linha que a delimita. A noção de perímetro foi, deste modo, clarificada e formalizada.

Balanço. Durante a realização da ficha circulei pelos diferentes grupos procurando auxiliá-los e esclarecer as dúvidas. Deste modo fui supervisionando o trabalho que os alunos estavam a realizar tendo-me apercebido das suas descobertas e dificuldades. Todos os grupos mediram o perímetro dos terrenos usando o Geogebra e deram as respostas baseando-se nos valores encontrados.

As principais dificuldades apresentadas pelos alunos foram: (i) compreender o enunciado das questões, em específico e palavra "vedar"; (ii) calcular a medida de alguns lados em vez do perímetro; (iii) relatarem o que fizeram, pois todos os grupos se limitaram a responder às questões sem explicações adicionais, apesar de terem sido solicitados para o fazer; e (iv) dificuldades na medição e manipulação das figuras com o Geogebra. Quanto ao trabalho desenvolvido, os alunos conseguiram atingir os objetivos propostos para as tarefas, resultando numa melhoria da compreensão do conceito de perímetro e formalização da sua definição. O Geogebra revelou ser uma boa ferramenta de trabalho e facilitou a aprendizagem dos alunos, quer na medição de perímetros quer na medição de áreas, que puderam ser fácil e rapidamente visualizadas e distinguidas.

5.2.2. Ficha de trabalho 2

A ficha de trabalho 2 foi aplicada em três blocos de 90 minutos, embora tenha previsto inicialmente a sua realização em apenas dois blocos. Isto pode dever-se ao facto dos alunos estarem a trabalhar em grupos de 4 ou 5 e distraírem-se com mais facilidade. Também não foi frequente, ao longo do ano letivo, o trabalho em grupo com tantos elementos e foi necessário fazer algumas alterações nos grupos e encaminhar alguns alunos para o Gabinete de Apoio ao Aluno devido ao seu mau comportamento. Houve alunos que faltaram e durante as aulas foi necessário fazer algumas modificações porque alguns grupos não estavam a funcionar adequadamente, o que também pode ter contribuído para o prolongamento da ficha por mais um bloco. Esta ficha de trabalho contemplava duas tarefas de cariz investigativo envolvendo a área e o perímetro de retângulos, cujo principal objetivo era levar os alunos a distinguirem e relacionarem as duas grandezas a partir das sequências e regularidades numéricas obtidas na medida do perímetro e área de retângulos. Tal como previsto para esta unidade de ensino, os alunos trabalharam os dois conceitos em simultâneo.

Antes de introduzir a tarefa organizei a sala distribuindo os alunos pelos grupos tendo-se formado dois grupos de cinco alunos e quatro grupos de quatro alunos. De seguida entreguei o material a cada grupo, incluindo o enunciado e fiz uma revisão das tarefas da ficha de trabalho 1, questionando os alunos acerca do que tinham feito e aprendido. Li e expliquei as tarefas do enunciado em voz alta para a turma mas os alunos já estavam divididos em grupo e já tinham o material pelo que se revelaram distraídos e foi necessário chamar a sua atenção várias vezes. Todos os grupos requereram a minha presença constante, fosse para dar apoio ao início ou continuidade do trabalho, fosse para controlar o comportamento e incentivar e motivar para o trabalho, dadas as características dos alunos da turma.

Tarefa 1. Nesta tarefa era pedido aos alunos que investigassem o que acontecia à área de um retângulo, quando se alteram as medidas do comprimento e largura mas se mantém o perímetro. Como podiam usar o geoplano e este ainda não sido usado, discuti com os alunos de que modo o poderiam usar para determinar a área e o perímetro dos retângulos. Assim:

Professora: Diz assim na pergunta 1: investiga o que acontece à medida da área. O que é que é a área?

Vários alunos: É o que está por dentro.

Professora: É o que está por dentro e nós, por dentro podemos preencher com várias coisas. Podemos preencher com quadradinhos… no vosso geoplano o espaço compreendido dentro de quatro pregos será um quadradinho. Certo?

Alunos: Sim.

Professora: Então se eu fizer esta figura (construindo um retângulo grande no geoplano), como é que eu sabia a área deste retângulo que eu tenho aqui, grande? O que é que eu fazia?

Rodrigo: Contando os pregos.

Professora: Contando os pregos? Os pontos lá dentro?

Mariana: Não. Fazendo um lado, o comprimento e outro o da largura, vezes e ia dar a área.

Professora: Será que eu preciso de fazer isso para saber isso, para contar aqui qual é o espaço dentro, que está dentro deste retângulo?

Alguns alunos diziam que sim outros que não e Mariana continuava a insistir que era necessário o comprimento e a largura. Como os alunos não chegavam a consenso nem davam outras ideias, decidi intervir:

Professora: No meio da confusão ninguém se entende. Vamos lá ver uma coisa, a área é o que está…

(…)

João: Dentro.

Professora: Dentro. Quantos quadradinhos é que eu teria aqui dentro?

João: Para aí uns…

Professora: Para aí não, vamos contar. (mostrando com a mão o número de quadrados da base fui contando) Aqui tenho um, aqui tenho dois e aqui tenho três, mais três?

Alunos: Seis.

Os alunos foram contando de três em três, por ser a medida da base do retângulo construído até chegarem à conclusão que estavam 27 quadradinhos no interior do retângulo. Posto isto, contei o número de filas de 3 quadradinhos com os alunos para que verificassem que estavam 9 filas e que 3×9 daria os 27 quadradinhos.

Professora: Então vamos começar a pensar porque é que é 3×9? Porque é que contar os quadradinhos é o mesmo que fazer um lado vezes o outro lado?

Pedro: Porque estamos a multiplicar um lado, a largura vezes o comprimento.

Professora: Porque é que isso é o mesmo que contar os quadradinhos todos um a um?

Pedro: Porque a largura vezes o comprimento dá a área.

Professora: Dá a área de qualquer figura?

Pedro: Não.

Mariana: Não, nem de todas.

Professora: Pronto vamos continuar a descobrir isso hoje. Eu vou ajudar cada grupo. (Conclui a leitura e explicação da tarefa 1 e os alunos iniciaram o seu trabalho).

Nesta discussão é possível verificar que os alunos se focam na fórmula da área do retângulo (comprimento vezes largura) dissociada da estrutura de fileiras ou grelha, e portanto efetuam uma memorização de uma fórmula sem compreensão. Durante a realização da tarefa os alunos tinham ao seu dispor vários materiais como o geoplano, calculadora, folhas quadriculadas e régua, para que pudessem desenvolver uma compreensão de conceitos da estrutura de fileiras ou conjuntos antes de procederem aos cálculos numéricos das fórmulas da área. Apenas usaram o geoplano e começaram a construir figuras sem reler o enunciado da tarefa nem esclarecendo as dúvidas que ainda tinham. Foi necessário lembrar quase todos os grupos que tinham de construir retângulos com o mesmo perímetro. Os alunos começaram por construir retângulos com perímetros diferentes, construíam retângulo a retângulo e preenchiam a tabela como se pode ver nas imagens das figuras 9 e 10:

Perímetro	Comprimento	Largura	Área
18	6	3	18
16	5	6	10
8	3	2	6
7	4	3	12
8	6	2	3
14	8	6	12

Figura 9. Lara, Iris, Margarida, Maria, FT2 - Tarefa 1

Perímetro	Comprimento	Largura	Área
12 cm	4 cm	2 cm	8
20 cm	4 cm	6 cm	24
10 cm	2 cm	3 cm	6
18 cm	4 cm	5 cm	20
6 cm	1 cm	2 cm	2

Figura 10. Bárbara, Mariana, Filipa, Lia e João S., FT2 - Tarefa 1

Sugeri que começassem por construir um retângulo e determinar o seu perímetro para depois, fixando o valor do perímetro, construírem outros retângulos com comprimento e largura diferentes e verificarem o que sucedia à área. O grupo de João construiu figuras que não eram retângulos e não teve em conta que tinham de ter o mesmo perímetro. Foi necessário pedir que se concentrassem e lessem o que era para fazer e os alunos deste grupo continuaram a construir figuras enquanto João lia algumas palavras do enunciado em vez de ler especificamente o que era pretendido. Ainda neste grupo e noutros dois grupos os alunos começaram a fazer medições com a régua no geoplano pela necessidade que tinham de trabalhar em centímetros. Alertei-os para o uso da existência de outras unidades de medida e que o espaço entre dois pregos era considerado uma unidade e o espaço entre quatro pregos era uma unidade quadrada.

Os alunos também revelaram dificuldade em identificar o comprimento e a largura nos retângulos, bem como determinar a sua medida, recorrendo ao geoplano. Muitos alunos consideravam o número de pregos em vez do espaço entre dois pregos para determinar o comprimento e revelaram dificuldade em contar o número de quadrículas correspondente à área. Também necessitaram de ajuda para encontrar todos os retângulos com o mesmo perímetro pois não consideraram o quadrado como um retângulo ou ainda tinham dificuldade em pensar nas medidas de comprimento e largura que os retângulos podiam ter antes de fazerem a sua construção. Os alunos sentiam necessidade de contar os espaços entre os pregos do geoplano um a um para determinar o perímetro.

Dadas as dificuldades dos alunos, tanto ao nível da tarefa como ao nível da concentração, a tarefa só foi concluída na aula seguinte. No início da aula discuti com os alunos o que tinha sido feito na aula anterior:

Professora: Qual era a nossa tarefa de investigação? O que é que se pretendia com a tarefa de ontem?

Rodrigo: Fazer retângulos.

Maria: Retângulos e mais retângulos.

Professora: Fazer retângulos, construir retângulos no geoplano ou então também podiam fazê-lo na folha quadriculada mas optaram por não o fazer e depois era fazer o quê?

Pedro: Descobrir como é que o perímetro influencia a área.

Professora: Descobrir como é que o perímetro influencia a área, mais especificamente o que é que fizeram?

André: Nós tivemos de calcular o perímetro.

Professora: Calcular o perímetro, do quê?

André: Da figura.

Professora: Que figura?

André: Do retângulo, o comprimento, a largura e a área.

Professora: E o que é que tinha de acontecer ao perímetro desses retângulos?

André: Tinha de dar 22.

Professora: Podia ser só 22, o valor do perímetro?

Catarina: Não tinha era de ser igual.

Professora: Tinha de ser igual. O que é que eu pretendia? Que vocês construíssem vários retângulos com igual perímetro e depois verem o que é que acontecia à área, olhando para o comprimento e para a largura. Portanto hoje vão dar continuidade a essa tarefa e depois vão fazer a tarefa 2, que eu vou explicar.

Os alunos relembraram a necessidade de construírem retângulos com o mesmo perímetro para explorarem o valor da área e darem continuidade à realização da tarefa.

A discussão final da tarefa 1 foi realizada em conjunto com a tarefa 2 na aula (bloco) seguinte. Os alunos tiveram dificuldade em tirar conclusões a partir da observação da tabela mas quase todos os grupos concluíram, sem ajuda, que a área podia ser obtida multiplicando o comprimento pela largura como se pode observar nas seguintes respostas:

Conclusões 1

R: O Comprimento pela largura da a Área / o comprimento e a largura

Bárbara, Mariana, Filipa, Lia e João S., FT2 - Tarefa 1

Conclusões do 1:

· O perímetro pode ser igual mas àrea não ~~tem de ser~~ é igual.

· No comprimento e largura se ordenarmos os números ficam por ordem ~~crescente~~.

· O comprimento x largura dá a área.

Catarina, Miguel, Diogo, Leandro e Gonçalo, FT2 – Tarefa1

Conclusões da Tarefa 1:

A largura x comprimento dá a área

João, Daniel M. Rafael e André, FT2 – Tarefa 1

conclusão

1 - trocar a largura e comprimeto e dá perímetro igual

2 - comprimento vezes a largura dá a área.

Pedro, Diana, Mariana G. e Hugo, FT2 – Tarefa 1

Conclusões

1ª - Se multiplicarmos o comprimento e a largura vai dar a área

Rui, Ricardo, Lucas e Rodrigo, FT2 – Tarefa1

Para que os alunos visualizassem que a aproximação da medida do comprimento à medida da largura fazia com que a medida da área aumentasse, foi necessário sugerir que colocassem os valores das medidas de comprimento por ordem crescente e questioná-los bastante, orientando-os no sentido pretendido, já que esta também foi uma dificuldade detetada (perceber que a área é maior com a aproximação da medida do comprimento à medida da largura):

Professora: Em cada retângulo. Ora vamos lá ver uma coisa… aqui nós temos o comprimento cinco e a largura um. A área é cinco. Aqui a área ficou maior. Diminuímos o comprimento e aumentámos a largura e a área ficou maior. Aqui voltámos a diminuir o comprimento e voltámos a aumentar a largura. A área ficou maior ainda. Que conclusões é que podem tirar a partir daqui?

Rui: Ah. A área é sempre o dobro.

Professora: A área não é sempre o dobro. A área é sempre o dobro do quê?

Rui: Do comprimento.

Professora: É? Então, aqui o comprimento é cinco e a área é cinco. Olhando para estes valores, o que é que vai acontecendo à área?

Rui e Rodrigo: A área vai ficando maior.

Professora: A área vai ficando maior quando acontece o quê ao comprimento e à largura?

Rodrigo: Quando o comprimento fica menor e a largura aumenta.

Professora: Ou seja, quando acontece o quê aos valores?

Rui e Rodrigo: Diminuem e aumentam.

Professora: Um aumenta e o outro diminui. O que é que acontece aos números? Este é cinco e este é um, este é quatro e este é dois, este é três e este é três. O que é que está a acontecer aos números?

Rodrigo: Um aumenta e outro diminui. (…)

Professora: E o que é que acontece aos valores. Eles estão a ficar o quê?

Rodrigo: Iguais.

Professora: Não estão a ficar iguais mas estão-se a fazer o quê um ao outro? O que está a acontecer aos números?

Rodrigo: Estão a ficar mais perto. (…)

Professora: E quando o comprimento e a largura são iguais que figura é que nós obtemos? (…)

Ricardo: Um quadrado.

Professora: Muito bem Ricardo, é isso mesmo. Então que conclusões é que tiramos? É isso que eu quero que escrevam.

Esta discussão levou os alunos do grupo a perceber que, apesar de se manter fixo o valor do perímetro, se o comprimento aumentasse a largura teria de diminuir e vice-versa e também levou à descoberta do valor máximo de área, correspondente ao quadrado, cujas em medidas de comprimento e largura são iguais.

Após a discussão o grupo escreveu as seguintes conclusões:

Conclusões: 1.º Se multiplicarmos o comprimento e a largura vai dar a área, 2.º o comprimento e a largura vam aumentando e diminuindo, e quando o comprimento e a largura são iguais a área ~~...~~ é maior.

Rui, Ricardo, Lucas e Rodrigo, FT2 – Tarefa1

Nos outros grupos a discussão foi semelhante originando as seguintes conclusões:

Conclusões 1
R: O Conprimento pela Largura da a Área / o comprimento e a largura em varias obsões podem não ser iguais mas pode dar o perimetro igual. / Maior comprimento fica com a menor Largura e a maior Largura fica com o menor comprimento / AS areas são mais pequenas quando o numeros estam mais distantes

Bárbara, Mariana, Filipa, Lia e João S., FT2 - Tarefa 1

• Quando diminuímos o comprimento e crescemos a largura a área é maior.
• Quando a largura está mais perto do comprimento a área é maior.

Catarina, Miguel, Diogo, Leandro e Gonçalo, FT2 – Tarefa1

Tarefa 2. A execução da tarefa foi iniciada no final do 2.º bloco e terminada no início do 3.º bloco, à qual se seguiu a discussão final das tarefas 1 e 2. Na tarefa 2 era pedido aos alunos que descobrissem o valor do perímetro e da área, duplicando as medidas do comprimento e largura. Os alunos fizeram algumas previsões:

Professora: Lembram-se o que é pedido na segunda tarefa?

João: Era duplicar… o comprimento e a largura.

Professora: E depois ver o quê?

Rodrigo: O perímetro.

Professora: Ver o que é que acontece ao… Perímetro e ver o que acontece ao quê?

João: À área.

Professora: É isso que eu quero que vocês façam.

João: Duplica também.

Professora: Vamos ver, se vai duplicar ou não.

Pedro: Não, não duplica. (…)

Professora: Quem é que acha que vai duplicar a área. Dedos no ar. (Alguns alunos colocaram os dedos no ar). E o perímetro? O que é que acham que vai acontecer?

Bárbara: Vai ficar maior.

Professora: Vai ficar maior mas também vai duplicar?

Rui: Vai ficar o dobro do comprimento.

Ana Lia: Vai ficar o dobro da…área.

Rodrigo: Não. (…)

Professora: Eu tenho este retângulo (desenhando no quadro), tem uma determinada área, certo? Tem um determinado comprimento e largura. Se eu agora multiplicar por dois o comprimento e multiplicar por dois a largura, o que é que vai acontecer à área? Vai se multiplicar por dois?

Alguns alunos: Não.

João S: Não, fica a mesma.

Catarina: O perímetro vai ficar igual à área.

Os alunos tinham previsto que, com a duplicação das medidas do comprimento e largura, a área também iria duplicar ou ficar igual e que o perímetro ficaria maior ou ficaria igual à área. Estas previsões tiveram algumas implicações no decorrer da resolução da tarefa, nomeadamente no grupo de Catarina.

Para concluírem a tarefa os alunos voltaram a organizar-se nos mesmos grupos mas já só puderam usar as folhas quadriculadas e a calculadora. Alguns grupos, principalmente aqueles que não usaram calculadora, revelaram dificuldade em calcular o perímetro do retângulo sem desenhar o retângulo e cometeram erros de cálculo. Para darem início ao trabalho foi necessário insistir e explicar a tarefa a cada grupo, individualmente, sugerindo que completassem a tabela, desenhando um retângulo e completando a primeira linha da tabela com as indicações do comprimento, largura, área e perímetro. Apenas dois grupos tiveram tempo de escrever as conclusões na ficha de trabalho mas enquanto circulei pelos diferentes grupos fui discutindo com os alunos os valores obtidos na tabela, para que chegassem às conclusões pretendidas. No grupo de João, apesar de não terem escrito as conclusões, completaram a tabela e descobriram, com a minha ajuda, que a área quadruplicava:

Professora: Olhem para os valores da tabela. Olhem para os valores da área e vejam que conclusões podem tirar.

João: São iguais. (…)

Professora: Não é essa a conclusão que tiras. Observem a tabela com atenção. Vejam aqui, do seis para o doze o que é que aconteceu?

João: Multiplicámos por dois.

Professora: A área é doze.

Rafael: Multiplicámos isto (comprimento) por isto (largura) e deu isto. (…)

Professora: Então tentem descobrir. Olhem aqui, do três para o doze também está multiplicado por dois?

André: Não.

Professora: Está multiplicado por quanto?

André: Por quatro.

Professora: Então e, do doze para o quarenta e oito, também está multiplicado por quatro?

Rafael: Doze vezes quatro, dá quarenta e oito.

Professora: Então o que é que acontece à área?

João: Multiplicamos por quatro.

André: Aumenta quatro vezes. (…)

Professora: Aumenta quatro vezes, não aumenta duas. Porque é que será quatro vezes?

João: Porque dois aqui (apontando para o comprimento) e dois aqui (apontando para a largura) …

Professora: Boa. (…) A área vai ficar multiplicada por quatro. Vejam lá se isto acontece nos outros exemplos.

A discussão com o grupo permitiu levar os alunos a focarem-se nos valores obtidos e registados na tabela para obter a conclusão pretendida – a área quadruplicava quando a largura e comprimento duplicavam. João, aluno estudo de caso, foi mais longe e encontrou a origem dessa relação.

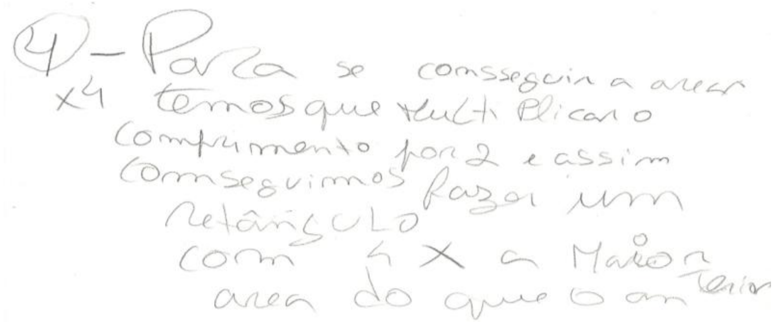
No grupo de Catarina, como previram, erradamente, que a área seria o dobro, preencheram a tabela com os valores baseados nessa ideia, sem confirmar a sua veracidade ou sem construírem o retângulo e verificarem a sua área e perímetro.

Professora: Boa! Fizeram a primeira, fizeram um retângulo com o comprimento seis e a largura três. A área, descobriram que era dezoito e o perímetro dezoito. Agora multiplicaram estes dois números por dois. Este passou a doze e este passou a seis. Está certo. E agora obtiveram a área, doze vezes seis … não são trinta e seis. Como é que vocês obtiveram esta área?

Catarina: Porque é dezoito vezes dois.

Professora: Mas vocês estão a fazer batota. Primeiro vão calcular a área, depois é que vão concluir se multiplicam por dois ou não. Façam lá a área deste retângulo. Isso é batotice porque essa é a conclusão que tu achas que vais obter. Então e se não for essa a conclusão e a área não for vezes dois? Como é que é? Desenhem o retângulo.

Este grupo também não chegou a registar as conclusões finais mas mudou a sua estratégia quando alertados do seu erro. O grupo de Pedro cometeu o mesmo erro de julgar que a área do retângulo também seria o dobro, pelo que sugeri que desenhassem o retângulo para determinaram o valor certo para a área. Eis o registo das conclusões da tarefa 2, efetuado pelo grupo de Pedro:


(4) – Parla se comsseguir a area x4 temos que multiplicar o comprimento por 2 e assim comseguimos fazer um retângulo com 4 x a maior area do que o anterior

Pedro, Diana, Mariana G. e Hugo, FT2 – Tarefa 2

No grupo de Rui os alunos preencheram corretamente a tabela mas apresentaram alguma dificuldade no registo das conclusões. Sugeri que tomassem atenção aos valores da tabela para o retângulo construído e que tentassem encontrar uma relação entre eles. Ao verificarem que o perímetro era o dobro do valor inicial, facilmente descobriram que a área era o quádruplo. Os alunos escreveram as seguintes conclusões:

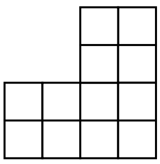
3ª O Perímetro é sempre o dobro.
4ª A área é sempre o quadroplo

Rui, Ricardo, Lucas e Rodrigo, FT2 – Tarefa 2

Na discussão final das tarefas 1 e 2 fui registando no quadro as conclusões a que os grupos chegaram para que todos pudessem fazer o registo final no seu caderno.

O grupo de Mariana iniciou a discussão da tarefa 1 dizendo que a área do retângulo se obtém multiplicando o comprimento pela largura e os restantes grupos concordaram e referiram ter obtido a mesma conclusão. Esta conclusão gerou uma discussão muito interessante e permitiu explorar o cálculo de áreas por decomposição, partindo do interesse dos alunos. Ao fazer o registo desta conclusão um aluno não reparou que esta se referia especificamente ao retângulo e iniciou-se a discussão da área de outras figuras:

Professora: Portanto, num retângulo funciona multiplicar o comprimento pela largura mas se eu tiver por exemplo esta figura:



(desenhei esta figura no quadro)

Qual é a área desta figura? Se a área é o que está dentro qual é a área desta figura?

Rafael: É doze.

Professora: É doze porquê Rafael?

Rafael: Quatro vezes três é doze. Então, eu ali vi quatro, mais quatro, mais quatro.

Professora: Ah! Então é quatro vezes três porque são quatro quadrados em baixo, quatro no meio e quatro em cima, não é? Esta área é...

Vários alunos: Doze.

Professora: Doze quê?

João S: Quadradinhos.

Professora: Doze quadradinhos, muito bem. Agora podemos multiplicar isto, podemos fazer comprimento vezes largura? Qual é que é o comprimento desta figura?

João: Não dá porque isto não é um retângulo.

Mariana: Professora como é que podemos achar a área deste tipo de figuras. (…)

Professora: Vendo o que está lá dentro.

Mariana: Contando os quadradinhos?

Professora: Contando os quadradinhos.

Mariana: E se não tiver quadrados como é que fazemos.

Professora: E se não tiver quadrados. Ora bem… Esta área é doze. O que é que o Rafael disse que nós podíamos fazer? Que era quatro vezes três, que três? Este retângulo (base) mais este retângulo (acima da base)…

Rodrigo: Mais o outro quadrado.

Professora: Mais este quadrado. O que é que ele fez? Ele juntou as três partes desta figura. Eu podia dividir esta figura em outras partes, não podia? Como é que eu podia dividir mais esta figura?

Rui: Dois quadrados e um retângulo.

Esta discussão permitiu não só explorar o conceito e definição de área e associá-la à respetiva unidade de medida (unidades quadradas), como também levar os alunos a descobrirem e discutirem estratégias para determinar áreas através da decomposição de figuras. Ao longo da discussão vários alunos deram ideias do modo de repartir a figura. Fez-se mais um exemplo e todos concluíram que podiam dividir a figura em retângulos e juntar as suas áreas.

Dando continuidade à discussão das resoluções da tarefa 1 os alunos concluíram que: há vários retângulos com o mesmo perímetro; podem ter figuras com o mesmo perímetro e área diferente; se aumentarem o comprimento e diminuírem a largura de um retângulo a área aumenta; quando o valor do comprimento se aproxima da largura a área aumenta; a área é maior quando a figura é um quadrado; e se se aumentar uma unidade ao comprimento tem de se diminuir uma unidade na largura, se se aumentar duas unidades ao comprimento tem de se diminuir duas unidades à largura e assim sucessivamente.

Quanto à tarefa 2, o grupo de Rui iniciou a discussão referindo que a área de um retângulo com o dobro das dimensões é sempre o quádruplo ou seja, quatro vezes maior que o retângulo inicial. Os outros grupos não se manifestaram pelo que explorei os valores obtidos nas tabelas dos outros grupos e, coletivamente a turma verificou que podiam obter a mesma conclusão, procedendo-se o seu registo no quadro. O mesmo sucedeu para a medida do perímetro, onde os alunos concluíram que o perímetro seria o dobro do perímetro do retângulo inicial. O motivo pelo qual a área quadruplicava e o perímetro duplicava também foi explorado. No que respeita ao aumento da área, alguns alunos facilmente justificaram referindo que se aumentava duas vezes no comprimento e duas vezes na largura, o aumento teria de ser quatro vezes porque se multiplica o comprimento pela largura e dois vezes dois é quatro. No que respeita ao perímetro os alunos tiveram mais dificuldade em se explicar, pelo que abordei o assunto através da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (assunto já trabalhado), mas como a aula já tinha terminado fiquei com a sensação de que não prestaram atenção à explicação e não a compreenderam.

Balanço. Apesar dos alunos terem demorado muito tempo a resolver a tarefa, a discussão final foi bastante interessante na medida em que permitiu explorar outros assuntos matemáticos, nomeadamente as áreas por decomposição. As noções de área e unidade de medida de área foram clarificadas e os alunos encontraram formas de determinar a área não só de retângulos como também de figuras compostas por retângulos. Os alunos obtiveram mais conclusões do que as esperadas para as tarefas e facilmente verificaram que a área do retângulo se pode determinar multiplicando a medida do comprimento pela medida da largura. O uso do geoplano favoreceu as investigações dos alunos e permitiu a distinção mais clara entre os conceitos de perímetro e área. As discussões em pequeno grupo foram essenciais para ajudar os alunos a clarificar o seu raciocínio e registar as conclusões. No que concerne às dificuldades apresentadas são de referenciar a (i) falta de concentração e compreensão de todos os dados do enunciado (não tendo em consideração algumas informações quando iniciaram a tarefa); (ii) dificuldade na identificação das unidades de comprimento no geoplano; (iii) dificuldade na identificação das unidades de área no geoplano; (iv) mistura de instrumentos de medição (geoplano e régua) para determinar o perímetro de retângulos; e (v) dificuldade no registo de conclusões.

5.2.3. Ficha de trabalho 3

Para a conclusão e discussão da ficha de trabalho 3 também foi necessário ocupar mais um bloco de 90 minutos do que o tempo previsto inicialmente. A turma tem imensas dificuldades de concentração e é pouco trabalhadora, pelo que não foi possível concluir a tarefa com o Geogebra estando os alunos organizados em grupo. Os alunos perderam imenso tempo com a primeira tarefa desta ficha de trabalho e estiveram muito distraídos a conversar e brincar sem solicitar ajuda, aproveitando o facto de eu estar noutro local da sala a ajudar os outros grupos.

Também aproveitei o início da aula para rever o que já tinha sido trabalhado e explorar, oralmente, os conceitos de figuras equivalentes e figuras congruentes, o que também retirou algum tempo à ficha de trabalho propriamente dita. Esta exploração partiu da intervenção de uma aluna:

Catarina: Também aprendemos que a área pode ser igual mas não quer dizer que o perímetro seja.

Professora: Muito bem. Aprendemos que podemos ter figuras com a mesma área mas o perímetro ser diferente. Vocês sabem como se chamam estas figuras que têm a mesma área mas o perímetro não é igual?

Os alunos ficaram em silêncio, pelo que insisti:

Professora: Quem sabe? Como se chamam as figuras que têm a mesma área mas o perímetro é diferente.

Os alunos voltaram a ficar em silêncio.

Professora: Ninguém sabe?

João S.: São iguais.

Professora: Equivalentes. É parecido. Porque é que não são iguais? Porque é que não são iguais? As figuras se tiverem o mesmo perímetro têm a mesma forma?

Alguns alunos responderam sim e outros responderam não:

Professora: Se tiverem um perímetro diferente a forma também vai ter que ser diferente. Pode ser na mesma um retângulo mas, como as dimensões do retângulo são diferentes o aspeto do retângulo é igual?

Se eu colocar um em cima do outro eles vão coincidir pontinho por pontinho?

Alguns alunos: Não.

Professora: Mas podem ter a mesma área. Se tiverem a mesma área não se chamam iguais, chamam-se equivalentes. Está bem? E se forem exatamente iguais mas um estiver numa posição e o outro, noutra? (desenho, no quadro, dois retângulos iguais, 3 x 2, em posições diferentes). Se um estiver assim e o outro assim mas têm a mesma área? Qual vai ser a área destes retângulos?

Pedro: Três vezes dois.

Ricardo: Seis.

Professora: Seis. A área é seis. Se eu tiver aqui 3 cm e aqui 6 cm, a área será o quê, que unidade de medida?

Alguns alunos: Seis.

Professora: Seis quê?

Alguns alunos: Centímetros.

André: Centímetros quadrados.

Professora: Seis centímetros quadrados. Então estas figuras têm a mesma área e o perímetro é igual?

Os alunos estavam distraídos e o facto de esta discussão estar a ocorrer na sala de informática, com os alunos distribuídos pelos computadores não ajudou. Os alunos estavam pouco participativos e demoraram algum tempo a concentrar-se e chegar à conclusão que o perímetro dos retângulos era o mesmo porque os retângulos tinham as mesmas dimensões. É notório que os alunos não tinham estudado a equivalência de figuras ou não se lembravam e também foi necessário ser eu a introduzir a noção de figuras congruentes. A discussão do que já tinha sido feito nas aulas anteriores continuou e os alunos relembraram as fichas de trabalho 1 e 2 mas, de um modo geral, estavam pouco participativos e muito desconcentrados.

Tarefa 1. Antes da entrega da ficha de trabalho expliquei aos alunos os objetivos pretendidos com a tarefa. Indiquei-lhes que iriam trabalhar com triângulos e tentar descobrir relações entre o triângulo e o retângulo, que já tinham estudado nas aulas anteriores. Após a entrega da ficha a todos os grupos e após auxiliar os alunos a abrirem o ficheiro contendo a imagem da tarefa (o que demorou algum tempo porque alguns computadores fizeram atualizações e outros estavam muito lentos) procedi à leitura, em voz alta, da tarefa 1. Expliquei o que significava classificar e perguntei os nomes que os triângulos podiam ter consoante o comprimento dos lados e dos ângulos mas os alunos estavam muito esquecidos participaram pouco. Deram início à resolução da tarefa mas tiveram muitas dificuldades em classificar os triângulos. Mesmo sugerindo que medissem a amplitude dos ângulos e o comprimento dos lados com o Geogebra tive de lhes pedir que parassem a tarefa para fazer uma breve revisão deste assunto, na turma, relembrando as várias denominações que os triângulos podem ter consoante o comprimento dos lados e amplitude dos ângulos. No fim fiz uma sistematização desses assuntos, por escrito, no quadro.

Fui auxiliando todos os grupos e quando quase todos tinham terminado as questões relativas à classificação dos triângulos e determinação do perímetro expliquei para a turma o que era pretendido nas questões seguintes para poderem traçar as alturas e conseguirem distinguir altura do lado. Assim pedi aos alunos para virarem a folha e continuei:

Professora: Vamos tomar atenção. Diz assim, chamamos altura de um triângulo à distância, ou seja, é uma linha que é medida na perpendicular. O que é que é perpendicular? O que é que são retas perpendiculares?

Alguns alunos: Cruzam-se.

Professora: Que se cruzam e cruzam-se de que forma?

Miguel: A fazer um sinal de mais, um T (cruzando os braços).

Professora: Fazem um sinal de mais ou a letra T. Então a altura de um triângulo… tem de ficar sempre perpendicular a cada um dos lados. O que é que diz lá mais? A altura é a distância, medida na perpendicular, entre um vértice, o que é que são os vértices?

Mariana: Os pontinhos.

Professora: Os pontinhos, é a distância na perpendicular entre o vértice e o lado oposto ao prolongamento do vértice. O que é que é o lado oposto ao vértice? Se eu tiver um vértice em cima onde está o lado oposto?

Alguns alunos: Em baixo.

Professora: Se eu tiver um vértice à esquerda onde está o lado oposto?

Alguns alunos: À direita.

Professora: À direita. Portanto aquilo que vão fazer agora é traçar as alturas dos triângulos. Como? Com a opção *reta perpendicular* do Geogebra. Onde é que têm de clicar? Carregam no vértice e no lado oposto e assim o Geogebra traça a reta perpendicular onde está incluída a altura. Vão tentar traçar todas as alturas de todos os triângulos.

Esta introdução permitiu rever assuntos trabalhados no período anterior, relativos às figuras no plano e os alunos relembraram conceitos importantes para a compreensão da tarefa e da noção de altura. Tentei ajudar os alunos e explicar novamente a cada grupo mas nem todos os grupos conseguiram concluir a tarefa 1 no Geogebra e revelaram dificuldade em encontrar as três alturas dos triângulos, pois não seguiram as indicações da ficha de trabalho ou as dadas por mim, ou confundiram-se com a diversidade de retas que traçaram no Geogebra para obter as alturas. Os triângulos representados estavam muito próximos e as retas que continham as alturas cruzavam-se umas com as outras, o que pode ter confundido os alunos e dificultado a tarefa (figura 11).

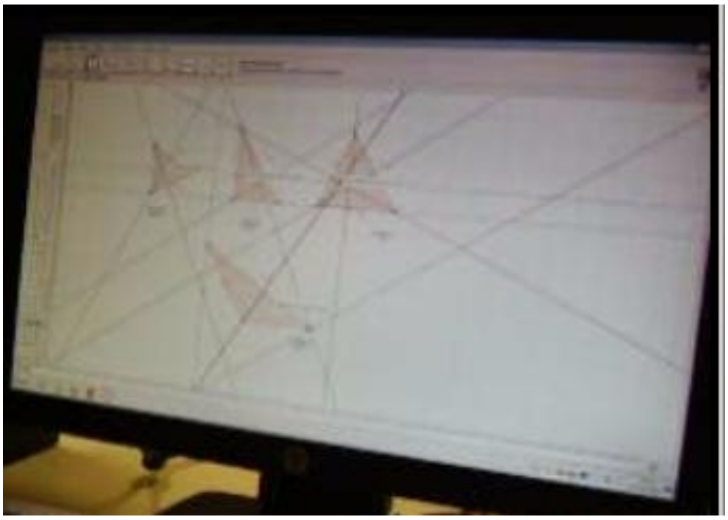
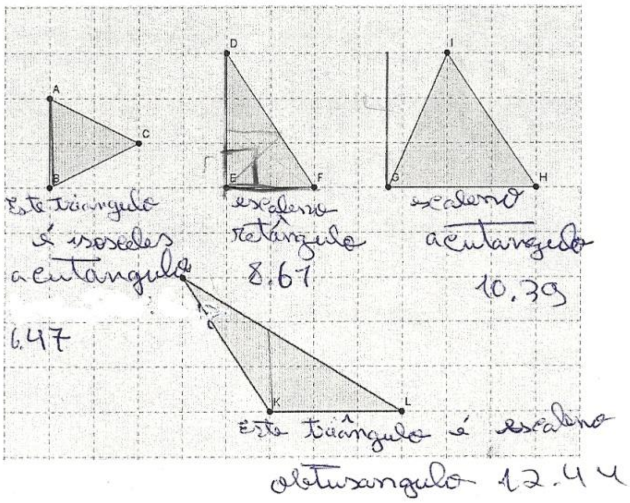
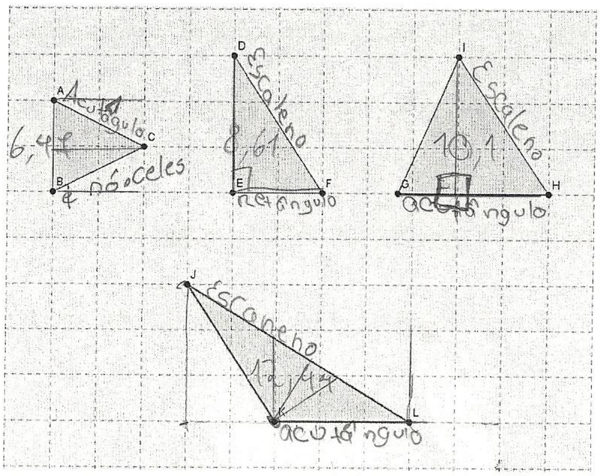


Figura 11. Imagem do ecrã de um computador FT3 – Tarefa 1

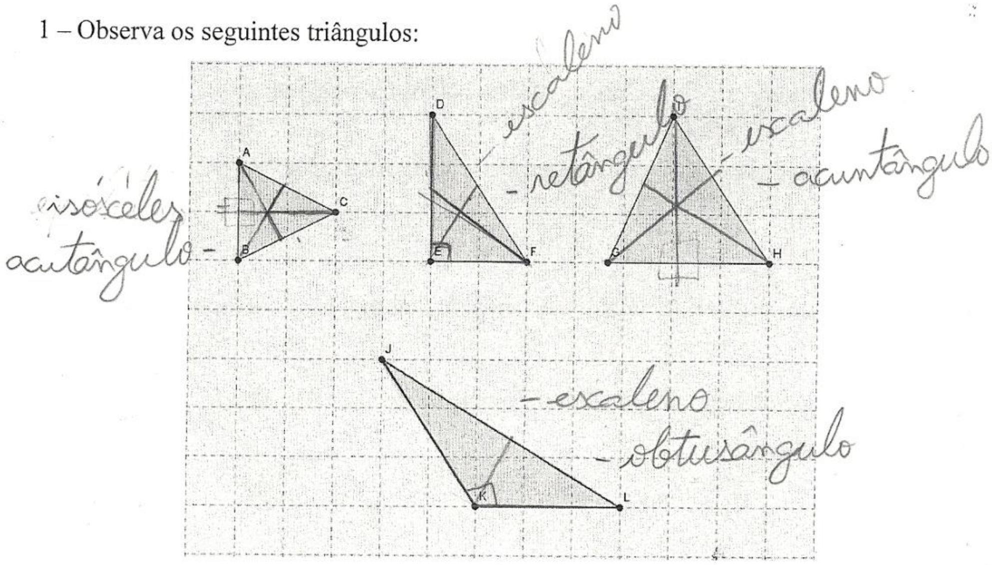
Alguns alunos também revelaram dificuldade em encontrar o lado oposto a um vértice e em traçar uma reta perpendicular a esse lado que passasse pelo vértice. A construção geométrica no Geogebra não se revelou muito eficaz nem facilitadora da aprendizagem nesta tarefa, pois nenhum grupo conseguiu representar na ficha as três alturas de cada triângulo corretamente. Apresento, em seguida as respostas dos grupos que fizeram uma tentativa nesse sentido:



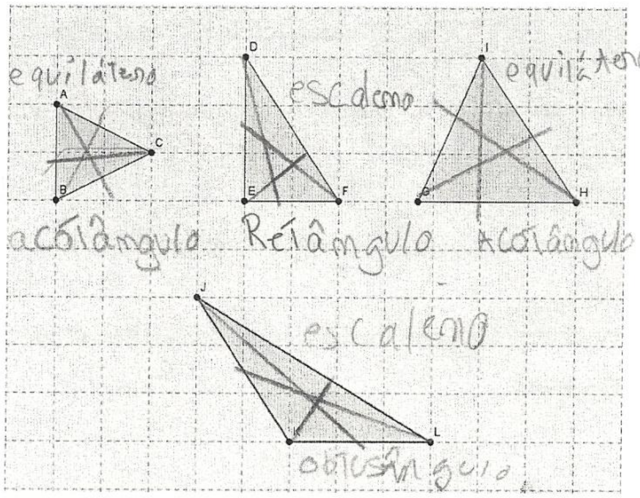
Ana Lia e Ana Filipa, FT3 – Tarefa 1



Mariana e Bárbara, FT3 – Tarefa1



Catarina e André, FT3 – Tarefa 1



João e Daniel M., FT3 – Tarefa 1

Alguns grupos não conseguiram concluir a tarefa 1 na aula em que dispunham de computador para trabalhar com o Geogebra e também não conseguiram responder à questão e).

Na aula seguinte, já sem o auxílio do Geogebra, antes de explicar a tarefa 2 tentei relembrar esta questão e discutir com os alunos o que era a altura de um triângulo a fim de tentar evitar que confundissem a altura com um lado inclinado do retângulo. Após a leitura da definição de altura de um triângulo contida na ficha de trabalho ("chamamos altura de um triângulo à distância, medida na perpendicular, entre um vértice e o lado oposto ou o seu prolongamento"), registou-se o seguinte diálogo:

Professora: Então o que é que á a altura do triângulo?

João: É a distância medida na perpendicular entre o vértice e o lado oposto.

Professora: Entre o vértice e o lado oposto (desenhando um triângulo no quadro). Se eu tiver o vértice aqui em cima qual é o lado oposto?

João: É o de baixo. (…)

Professora: Então este lado aqui é uma altura (apontando para um lado inclinado)?

Alguns alunos: Não.

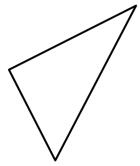
Professora: Porque é que não posso chamar altura a este lado?

João: Porque está em diagonal. (…)

Pedro: Tem de estar na vertical.

Professora: Não é por aí, não é só na vertical. Pode ser assim:

(Desenho um triângulo semelhante a este no quadro)



Pedro: Tem de ter um ângulo reto.

Ana Lia: Porque tem de ter um ângulo reto.

Professora: Tem de ter um ângulo reto onde? Porque é que este lado não é a altura?

João: E é um lado. (…)

Professora: Portanto um lado é um lado e a altura é a altura. Então mas aqui neste triângulo (triângulo retângulo desenhado no quadro) onde está a altura? Quem é capaz de me desenhar uma altura neste triângulo?

Margarida: (Após uma tentativa falhada de Rui e após ter feito um traço por cima de um lado correspondente à altura e eu ter perguntado porque era uma altura). Porque faz um ângulo reto com o outro lado.

Professora: Muito bem. Há mais alguma altura?

Catarina, após uma tentativa falhada de Mariana para traçar outra altura marca o outro lado do triângulo, correspondente à altura:

Professora: Exatamente. Então o que é que acontece neste triângulo que não acontecia no outro?

Rui: Fez um ângulo de 90º.

Professora: Porquê? Como é que se chama este triângulo? (…)

Rui: É retângulo.

Professora: É um triângulo retângulo. Então o que é que acontece à altura quando o triângulo é retângulo? … Aqui neste triângulo a altura é diferente dos lados e aqui?

Rui: A altura é igual.

Professora: Temos aqui duas alturas possíveis do triângulo. O que são estas alturas? O que são estas linhas do triângulo? (…)

João: São os lados.

Professora: E esta altura corresponde ao quê do triângulo?

Alguns alunos: Aos lados.

Professora: Aos lados porque o triângulo é retângulo.

João: Tem três vértices.

Professora: Tem sempre três vértices e sempre três lados. Não há dúvida nenhuma que o triângulo tem sempre três vértices e sempre três lados mas quando o triângulo é retângulo duas alturas correspondem a dois lados, aos lados que fazem o ângulo…

Rui: Reto.

Professora: Reto, está bem? Atenção a isso. Nos outros triângulos, obtusângulo e acutângulo, isso não acontece porque eles não têm um ângulo reto e a altura tem de formar um ângulo reto com um lado.

Esta discussão permitiu esclarecer eventuais dúvidas dos alunos e trabalhar a noção de altura em vários tipos de triângulos. Os alunos conseguiram distinguir lado de altura, compreendendo a necessidade da altura do triângulo ser perpendicular à base, fazendo com ela um ângulo reto.

A discussão da tarefa 1 só ocorreu no final do segundo bloco dedicado a esta ficha de trabalho, especialmente a discussão da alínea e):

Professora: A alínea e) diz assim, será que consegues traçar o mesmo número de alturas em qualquer triângulo e porquê? Rui, o que é que escreveram na vossa resposta, o teu grupo?

Rui: Não porque os triângulos são todos diferentes.

Professora: E quantas alturas conseguiram traçar em cada um dos triângulos? Quem é que concorda com o grupo do Rui?

Os alunos estavam pouco participativos, registei a resposta no quadro e quando perguntei grupo a grupo, uns responderam que sim, que era possível traçar o mesmo número de alturas e outros que não. Comecei por pedir que justificassem a resposta negativa, pegando na justificação do grupo de Rui.

Mariana: Porque os triângulos têm diferente classificação quanto aos ângulos.

Professora: Portanto, são diferentes porque têm ângulos diferentes. Mais justificações.

Os alunos não apresentaram mais justificações.

Professora: Então agora quem respondeu sim, qual foi a justificação?

Gonçalo: Sim, porque cada triângulo tem três vértices.

Professora: Boa, uma justificação possível (registei no quadro). Só isso? Achas que esta justificação chega, foi só o que escreveram?

Gonçalo: Sim.

Professora: Mais justificações para o sim?

André: Porque todos os triângulos têm três lados.

Professora: E o que é que a altura tem a ver com o lado? Mais justificações?

Os alunos continuaram pouco participativos e limitaram-se a apresentar a mesma justificação.

Professora: Então e agora quem é que tem razão? O não ou o sim? (Alguns alunos disseram não e outros sim). Vamos lá a pensar. O que é que é a altura? Eu vou desenhar aqui os triângulos (desenho os triângulos no quadro). Então vamos lá ver uma coisa. (…) O que é que é a altura? (…)

Pedro: É uma linha na perpendicular.

Professora: É uma linha na perpendicular que vai desde onde até aonde?

Pedro: Dum vértice até ao lado oposto.

Professora: Dum vértice até ao lado oposto. Então o triângulo não tem três vértices?

Alunos: Tem

Professora: Não tem três lados, ao todo?

Alunos: Tem.

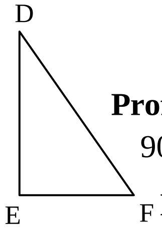
Professora: Então eu não consigo a cada vértice e lado oposto traçar uma altura?

Alunos: Sim. (…)

Professora: Então eu vou ter de conseguir traçar três alturas. Vamos lá ver (desenho no quadro as três alturas num triângulo). Quantas alturas tem este triângulo?

Alunos: Três.

Professora: Três alturas. Aqui (apontando para um triângulo retângulo) já tenho um ângulo de 90º. Onde é que estão as alturas?



Se eu for do vértice D até ao lado oposto, qual é que é o lado oposto?

Ricardo: É o E. (…)

Professora: É o [EF]. Este é o lado oposto. Tem de fazer um ângulo de 90º, cá está a altura. Qual é o lado oposto ao ângulo F?

Mariana G.: É o D.

Ana Lia: É aquele lá ao fundo.

Professora: É este (apontando para [ED]). Tem de fazer um ângulo de 90º. Está aqui esta altura. Duas alturas. E agora do ângulo que tem o vértice no ponto E não consigo traçar outra altura?

Alunos: Consegue.

Professora: A fazer um ângulo de 90º com aquele lado. Quantas alturas desenhei aqui?

Alunos: Três.

Professora: Quem é que vem aqui desenhar as alturas?

Alguns alunos colocaram o braço no ar e Rodrigo foi ao quadro.

Professora: Exatamente, muito bem. Quantas alturas desenhaste Rodrigo?

Rodrigo: Três.

André foi ao quadro desenhar as alturas do outro triângulo mas revelou alguma dificuldade porque a altura ficava fora do triângulo. Na sua tentativa a altura não ficava perpendicular à base.

Professora: Quantas alturas eu tracei em cada um dos triângulos?

Alunos: Três.

Professora: O que é que aconteceu neste triângulo? Onde é que estão as alturas?

Mariana: Fora.

Professora: Fora. Há duas alturas que estão fora, ou seja, nem sempre a altura está no interior do triângulo. Se o triângulo tiver um ângulo obtuso para fazer uma altura para ficar na perpendicular eu posso medi-la do lado de fora porque só assim é que vai fazer um ângulo de 90º.

Rodrigo: Um ângulo reto.

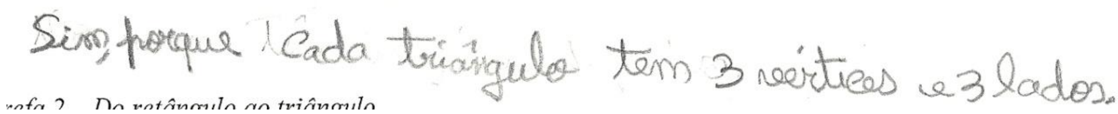
Professora: Um ângulo reto desde a base até ao vértice.

Professora: Então qual é que é a resposta certa?

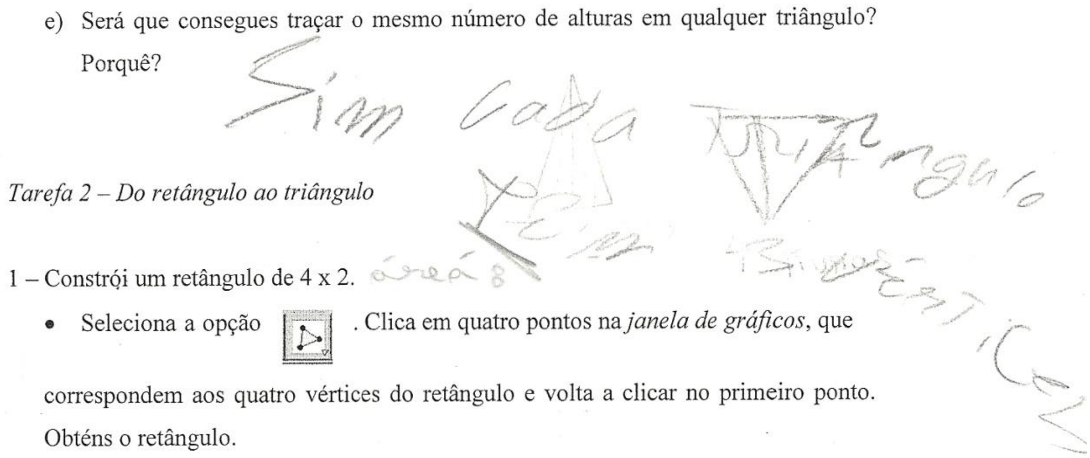
Alunos: É sim.

Professora: Sim, cada triângulo tem três vértices, três lados e em cada um podemos traçar uma altura.

Com as intervenções dos vários grupos foi possível mudar a opinião dos alunos e fazê-los verificar que, em qualquer triângulo poderiam traçar três alturas e que estas se podiam situar fora do triângulo. Mais uma vez distinguiram altura de lado e chegaram à conclusão pretendida. Alguns alunos só reponderam a esta questão durante a discussão final registando as seguintes respostas:


Sim, porque cada triângulo tem 3 vértices e 3 lados.

Ana Lia e Ana Filipa, FT3 – Tarefa 1


e) Será que consegues traçar o mesmo número de alturas em qualquer triângulo? Porquê?

Sim cada triângulo tem 3 vértices

Tarefa 2 – Do retângulo ao triângulo

1 – Constrói um retângulo de 4 x 2. área 8

- Seleciona a opção . Clica em quatro pontos na *janela de gráficos*, que correspondem aos quatro vértices do retângulo e volta a clicar no primeiro ponto. Obténs o retângulo.

João e Daniel M., FT3 – Tarefa 1

Tarefa 2. Para executarem esta tarefa os alunos já não dispuseram de computador com Geogebra e, por causa da dificuldade do cálculo da área do triângulo sem esta ferramenta informática, iniciei a explicação da tarefa aos alunos com uma pequena discussão acerca da relação entre triângulo e retângulo:

Professora: Para calcularem a área… Como é que vocês sabem a área do triângulo? Não sabem.

João: Se calhar multiplicamos os lados.

Pedro: Deve só caber dois triângulos em cada retângulo. Dividimos a área do retângulo em dois.

Professora: Porque é que tu achas que só cabem dois triângulos num retângulo?

Pedro: Porque tem de ter a mesma base, então ocupa o mesmo espaço da base.

Professora: Porque é que cabem dois e não cabe só um?

Ana Lia: Porque dois triângulos cabem num quadrado e num retângulo também cabem dois.

Professora: Repete lá Pedro, em voz alta. (Como os alunos começaram a falar ao mesmo tempo pedi para se acalmarem e falar um de cada vez porque a discussão era importante).

Pedro: Em cada retângulo só cabe dois triângulos porque cada triângulo tem de ter uma base.

Professora: Cada triângulo tem de ter uma base.

Rui: Têm de ser iguais.

Professora: Dois iguais, é isso?

Rui: Portanto dividimos um quadrado ao meio de um vértice ao outro, cruzado.

Professora: Exatamente. Então vamos fazer assim, vão desenhar os triângulos de modo a que sejam triângulos retângulos, dentro deste retângulo e ver o que é que acontece à área. Com o quadriculado vejam o que é que acontece à área, preencham a tabela e respondam à alínea c).

Com esta discussão os alunos foram-se apercebendo que num retângulo ou quadrado cabem dois triângulos e, portanto, que a área do triângulo corresponde a metade da área do retângulo. A intervenção de alguns alunos foi essencial para que tomassem consciência da relação existente entre as áreas do triângulo e do retângulo.

Os alunos já não executaram esta tarefa no Geogebra mas a sua conclusão e discussão foi elaborada com o auxílio deste software, projetado para a turma.

Professora: Descobriram alguma coisa? (Pedro coloca o dedo no ar). Pedro o que é que descobriste?

Pedro: Que o retângulo, tal como o quadrado, é formado por dois triângulos.

Professora: Muito bem. Cabem dois triângulos dentro de um retângulo ou dentro de um quadrado. Um quadrado também é um retângulo só que é um retângulo que tem o quê?

Pedro: Os lados todos iguais.

Professora: Os lados todos iguais, muito bem. Então eu pedi-vos para fazerem construções e eu vou fazer a construção aqui no Geogebra e depois vem cada um ao quadro fazer o resto. Está bem? (Catarina coloca o braço no ar) Diz Catarina, queres acrescentar alguma coisa a estas conclusões?

Catarina: Então se os triângulos formam um retângulo quer dizer que a área do triângulo é metade da área do retângulo.

Professora: Excelente. Concordam com aquilo que a Catarina disse?

Alunos: Sim.

Professora: É mesmo isso Catarina, é mesmo isso. Vamos descobrir que se cabem dois triângulos num retângulo, então o triângulo é metade do retângulo. E já sabemos calcular a área do retângulo. Como é que se calcula a área do retângulo?

Como só o Pedro e Rodrigo colocaram o dedo no ar perguntei:

Professora: O que é a área?

Alguns alunos: É o que está por dentro.

Professora: É o que está por dentro, é todo o espaço que está dentro da figura. E nós vimos que havia uma forma rápida de contar os quadradinhos que estavam dentro dos retângulos.

Ana Lia: Os de cima vezes os do lado.

Professora: E o que é que fazíamos a estas duas medidas? (…)

Rodrigo: Multiplicávamos.

Professora: Multiplicávamos, muito bem. Multiplicando o comprimento pela largura ou pela altura obtemos a área do retângulo. Então como é que será a área do triângulo?

Mariana: É metade da do retângulo.

Professora: Então o que é que eu tenho de fazer?

Mariana: Primeiro temos de fazer uma conta de multiplicação para sabermos qual é a área do retângulo e depois esse resultado temos de dividir em dois.

Professora: Então e se eu não tiver nenhum retângulo desenhado, tiver só um triângulo?

Nesta altura, alguns alunos já tinham percebido que a área do triângulo corresponde a metade da área do retângulo mas a discussão continuou sem os alunos referirem a fórmula da área do triângulo. Foi então que João S. teve uma intervenção pertinente e interessante, o que me levou a pensar que estava a compreender como se poderia determinar a área do triângulo a partir da área do retângulo:

João S: Então os quadrados no triângulo é metade dos quadrados no retângulo.

Professora: Quais quadrados? Os que estão no interior?

João S: Lá dentro.

Professora: Lá dentro? Sim. Precisaremos de metade dos quadrados do retângulo. Se no retângulo couberem doze quadrados lá dentro, quantos vão caber dentro do triângulo?

João S: Seis.

Professora: Muito bem, metade, é mesmo isso. Vamos ver aqui no Geogebra.

Com as indicações dos alunos construí um retângulo quatro por dois, no Geogebra, projetando para toda a turma a construção. Os alunos verificaram facilmente que a área desse retângulo era oito quadrículas e registaram o valor nas fichas. De seguida construí um triângulo com a mesma base e altura dentro do retângulo. Os alunos verificaram que era difícil determinar a área por contagem de quadrículas e fez-se a medição no Geogebra.

Professora: O retângulo é oito e o triângulo, que número apareceu lá?

Alunos: Quatro.

Rui: É metade.

Professora: É o que vocês tinham dito, é metade?

Alunos: Sim.

Professora: Vou construir outro triângulo.

João S: Ó stôra, nós também podíamos ter dividido em mais triângulos pequenos.

Professora: Mas repara há aqui uma coisa importante, para ser metade do retângulo, o triângulo tem de ter a mesma base e a mesma altura.

Os alunos confundiram-se e interrogaram-se acerca dos triângulos que sobravam para completar a área do retângulo.

Professora: Reparem, eu estou a calcular a área deste triângulo (grande). A área deste triângulo é quatro mas o que é que vai acontecer a este pedacinho se eu juntar com este?

João S: Vai dar outro triângulo.

Catarina: Se eu juntar este com este vai dar este (apontando para o triângulo desenhado).

Professora: Exatamente.

Com a figura projetada apontei as suas várias partes para que os alunos visualizassem que o retângulo era formado por dois triângulos iguais, embora repartidos de modo diferente. Os alunos construíram outros triângulos no retângulo e verificaram que tinham a mesma altura e base e determinaram a área, verificando que também tinham quatro unidades de área. Repetiram o procedimento para um retângulo com outras dimensões. Quase todos os grupos preencheram a tabela da ficha e responderam à alínea c) do mesmo modo, como se pode verificar nas seguintes respostas:

	Medida da Base	Medida da Altura	Medida da Área
Triângulo	4	2	4
Triângulo	5	4	10
Triângulo			

c) Que relação existe entre a área de cada um dos triângulos e a área do retângulo?

Área do retângulo = altura × comprimento (base)

Área do retângulo = $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

d) Realiza as questões anteriores para outro retângulo com dimensões à tua escolha

Ana Lia, Ana Filipa, FT3 – Tarefa 2

	Medida da Base	Medida da Altura	Medida da Área
Triângulo	4	2	4
Triângulo	5	4	10
Triângulo			

c) Que relação existe entre a área de cada um dos triângulos e a área do retângulo?

A área do triângulo é metade da área do triângulo.

Bárbara, Mariana, FT3 – Tarefa 2

	Medida da Base	Medida da Altura	Medida da Área
Triângulo	4	4	8
Triângulo	5	4	10
Triângulo			

c) Que relação existe entre a área de cada um dos triângulos e a área do retângulo?

R: A área do triângulo é metade da área do retângulo.

Catarina, André, FT3 – Tarefa 2

	Medida da Base	Medida da Altura	Medida da Área
Triângulo	4	2	4
Triângulo	4	2	4
Triângulo	4	2	4

c) Que relação existe entre a área de cada um dos triângulos e a área do retângulo?

A área do triângulo é metade da área do retângulo.

Rafael, Diogo, FT3 – Tarefa 2

	Medida da Base	Medida da Altura	Medida da Área
Triângulo			
Triângulo			
Triângulo			

c) Que relação existe entre a área de cada um dos triângulos e a área do retângulo?

A área do retângulo é metade da área do retângulo

Ricardo, Lucas e Gonçalo, FT3 – Tarefa 2

O grupo de João apresentou uma resposta diferente, o que pode ser explicado pelo facto de este aluno não ter estado presente nesta aula. Eis a reposta do grupo:

	Medida da Base	Medida da Altura	Medida da Área
Triângulo	4 □	2 □	8 □
Triângulo	2 □	4 □	8 □
Triângulo	4 □	2 □	8 □

c) Que relação existe entre a área de cada um dos triângulos e a área do retângulo?

É mais fácil calcular a área do retângulo porque não tem linhas na diagonal

d) Realiza as questões anteriores para outro retângulo com dimensões à tua escolha.

João, Daniel, FT3 – Tarefa 2

Após todas estas discussões e construções no Geogebra, não foi difícil para os alunos perceberem que a área do triângulo representava metade da área de um retângulo com a mesma base e a mesma altura. O Geogebra revelou ser uma boa ferramenta neste trabalho, onde os alunos puderam descobrir e comprovar as suas ideias iniciais sem terem de recorrer a uma fórmula para determinar áreas. A grande dificuldade dos alunos surgiu quando pedi para apresentarem as ideias discutidas numa fórmula pois tiveram dificuldade em descobrir como calcular a área de um triângulo com as medidas apresentadas. Não conseguiram aplicar os conhecimentos que tinham da fórmula da área do retângulo (base × altura) à fórmula da área do triângulo. Os alunos perceberam a ideia em situações concretas, em representação geométrica, mas não conseguiram chegar à representação algébrica como se pode verificar na seguinte discussão:

Professora: Então que medidas do triângulo é que nós precisamos de saber para calcular a sua área?

Pedro: A base vezes a altura.

Professora: E depois o que é que temos de fazer?

Pedro: Temos de multiplicar uma pela outra.

Professora: E depois?

Pedro: Vai nos dar a área…

Professora: Isso dá-nos a área do quê?

Alguns alunos: Retângulo.

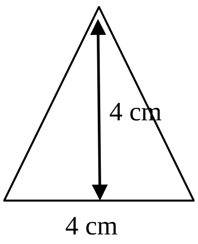
Professora: Do retângulo e depois para calcular dum triângulo?

Pedro: Temos de dividir em dois.

Professora: Temos de dividir por dois. Então como é que se calcula a área de qualquer triângulo?

Pedro: Temos de dividir a área do retângulo por dois.

Professora: E sem pensar em retângulos? Se não tivermos lá retângulos. Se eu tiver um triângulo assim (desenho no quadro um triângulo). A base é quatro centímetros, a altura é quatro centímetros. (…)



João S: É oito.

Professora: Porque é que é oito, João?

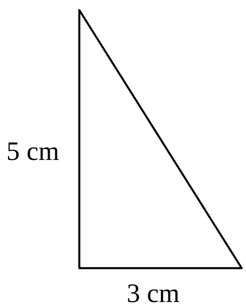
João S: Porque aquela metade é quatro com a outra vai ser oito. (…)

Professora: Porque é que é oito?

Rafael: É oito porque metade é quatro e a outra metade é oito, é mais quatro, é oito.

Apercebi-me que os alunos também se estavam a confundir com o desenho do quadro e a pensar em metades dentro do triângulo, uma vez que a altura o dividia ao meio. Nenhum aluno apresentou a justificação pretendida, ou seja, que a área seria metade de quatro vezes quatro, isto é, metade de dezasseis e, portanto, oito. Desenhei outro triângulo, neste caso, um triângulo retângulo e continuei a discussão:

Professora: Então se eu tiver um triângulo assim, pela tua lógica…



Professora: Se eu tiver a altura cinco e a base três?

Rodrigo: Sete e meio.

Alguns alunos: É quinze. É quinze.

Entretanto, os alunos continuaram a discutir a figura anterior com base na divisão do triângulo e não chegaram a consenso. Reiniciei a discussão partindo da ideia que já tinha surgido, que a área do triângulo era metade da do retângulo:

Professora: Não temos de dividir o triângulo mas precisamos do valor da altura. (…) Nós chegámos à conclusão que a área do triângulo é metade do retângulo, certo? Vocês já tinham dito, então calculamos o retângulo e dividimos por dois. O que é que eu tenho de fazer ali se não tenho o retângulo? Não tenho o retângulo mas tenho a altura.

Rui: Nós se imaginarmos um quadrado com quatro lados temos dezasseis centímetros no total, então temos de dividir quatro por dezasseis. (…)

Professora: Eu não estou a perceber onde é que queres chegar? Se tiveres um quadrado, quatro por quatro, lá dentro tem dezasseis quadradinhos, quantos quadradinhos vai ter o triângulo?

Rui: Oito.

Professora: O que é que tu fizeste aos dezasseis?

Rui: Dividi por dois. (…)

Professora: Então o que é que eu faço para calcular a área deste triângulo?

Pedro: Dividimos a área do retângulo por dois.

Professora: Mas eu aqui não tenho um retângulo tenho um triângulo.

Pedro: Fazemos quatro vezes quatro e depois dividimos. (…)

Professora: Então basta-me fazer base vezes altura para calcular a área do triângulo?

Alguns alunos: Não.

Professora: Não chega, tenho de fazer mais o quê? Dividir por dois. Então como é que ficaria a área deste triângulo (apontando para o segundo triângulo desenhado)?

Rodrigo: Cinco vezes três e depois dividir por dois.

João S: Dava sete e meio.

Os alunos já conseguiam estabelecer a relação entre triângulo e retângulo mas para pensarem na área do triângulo necessitavam sempre de referir o retângulo. A intervenção de Rodrigo foi essencial para a introdução da fórmula da área do triângulo e após uma longa discussão os alunos registaram as conclusões no caderno diário, incluindo as fórmulas da área do retângulo e do triângulo. Mesmo assim ainda continuavam a pensar no triângulo apenas como parte integrante de um retângulo como se pode verificar na questão de Mariana:

Mariana: Professora então para sabermos a área de um triângulo é muito mais fácil fazermos um triângulo dentro de um retângulo e depois dividir por dois.

Professora: O que eu estou a dizer é que se vocês têm um exercício em que têm lá um triângulo desenhado, têm de saber calcular a sua área. Que medidas é que precisam para calcular a área do triângulo que lá está?

Alguns alunos: A base e a altura.

Professora: Depois é só multiplicar e dividir no fim por?

Alguns alunos: Dois.

Professora: Por dois porque é metade.

Ana Lia: É simples.

Professora: É simples. Mas perceberam porque é que é assim?

Ana Lia: Fizemos aqui um bicho-de-sete-cabeças.

Professora: Fizemos mas é para vocês perceberem porque é que é assim e não se esquecerem que têm de dividir por dois.

A discussão terminou concluindo que para obter a área do triângulo basta multiplicar a base pela altura e dividir por dois. Aproveitando os triângulos equivalentes construídos no Geogebra, relembrei as noções de figuras equivalentes e congruentes, que também seriam necessárias para a realização da próxima ficha de trabalho.

Balanço. Os alunos demoraram imenso tempo a resolver a tarefa 1, o que impossibilitou a conclusão desta tarefa e realização da tarefa 2 no Geogebra. Estiveram muito agitados e pouco participativos e demonstraram muita dificuldade em classificar os triângulos da tarefa 1, perdendo muito tempo nesta atividade secundária.

No que respeita à tarefa 1, os alunos tiveram dificuldade em perceber que os triângulos têm três alturas e, mesmo com o recurso ao Geogebra, tiveram dificuldade em visualizá-las e construí-las. No triângulo retângulo apenas identificaram como altura um dos lados, um que formasse o ângulo reto mas estivesse posicionado na vertical. A utilização do Geogebra não se revelou eficaz na identificação e construção das alturas dos triângulos, se bem que poderia ter funcionado se estivessem representados menos triângulos e estivessem mais afastados uns dos outros. Com a discussão da tarefa e as intervenções dos alunos conseguiram distinguir altura de lado de um triângulo e justificar a existência de três alturas num triângulo.

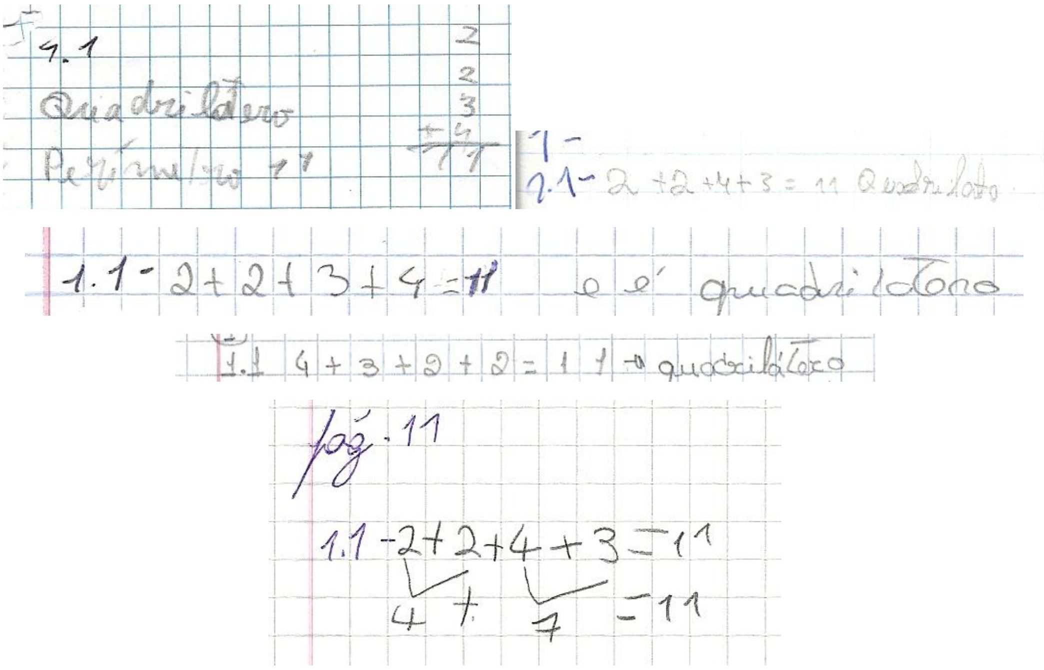
No que respeita à tarefa 2 os alunos perceberam que a área do triângulo corresponde a metade da área do retângulo mas tiveram muita dificuldade em representar esta relação algebricamente, ou seja, encontrar a fórmula da área do triângulo, partindo da fórmula da área do retângulo. A diversidade de nomenclaturas para os lados do retângulo pode explicar esta dificuldade, já que os alunos relacionam a área do retângulo ao produto do comprimento pela largura mas não ao produto da base pela altura. A passagem da ideia da relação entre área do triângulo e área do retângulo para a fórmula da área do triângulo deu origem a uma discussão muito morosa, onde só alguns alunos participaram e revelaram algumas dificuldades, optando por fazer divisões no triângulo para determinar a sua área, em vez de usarem os valores de que dispunham e as ideias discutidas previamente. Não posso, nesta altura, afirmar que os alunos usam a fórmula da área do triângulo com compreensão mas a relação entre a área das duas figuras foi bem explorada e referenciada pelos alunos.

5.2.4. Ficha de trabalho 4

Esta ficha de trabalho foi iniciada no segundo tempo de uma aula, logo a seguir à discussão da ficha de trabalho 3 mas a sua realização foi concluída como trabalho de casa e a discussão das tarefas só foi feita depois da realização e discussão da ficha 5 porque esta última, ao requerer o recurso ao Geogebra, tinha de ser efetuada na aula seguinte, por ser o único dia da semana em que a sala de informática estava disponível. O principal objetivo da ficha de trabalho 4 era rever e consolidar os assuntos trabalhados nas fichas de trabalho anteriores. As tarefas estavam presentes no manual escolar dos alunos e foram realizadas individualmente. Como a conclusão desta ficha foi efetuada em casa, nem todos os alunos a concluíram e/ou entregaram.

Tarefa 1. Esta tarefa tinha como objetivo principal levar os alunos a determinar o perímetro de polígonos mas também era necessário que os classificassem, assunto que já tinha sido trabalhado no período anterior. Os alunos demoraram algum tempo a iniciar a tarefa pois não estavam a perceber o que queria dizer “classificar” e alguns já não se lembravam do nome de um polígono com sete lados, pelo que o relembrei para toda a turma.

Na primeira figura quase todos os alunos responderam corretamente mas, à exceção de dois alunos, um dos quais Mariana, não indicaram a unidade de medida como se pode verificar nas respostas seguintes:



Na correção da tarefa, um aluno ainda continuava a confundir a unidade de medida do perímetro, neste caso centímetros, com a unidade de medida da área (cm^2).

Professora: (Constatando a falta da unidade de medida na resposta) Olha é para calcular o perímetro em que unidade de medida?

Rui: Centímetros quadrados.

Professora: Centímetros quadrados. As unidades do perímetro são centímetros quadrados?

Alguns alunos: Não.

Professora: Porque não?

Mariana: Isso é quando é a área.

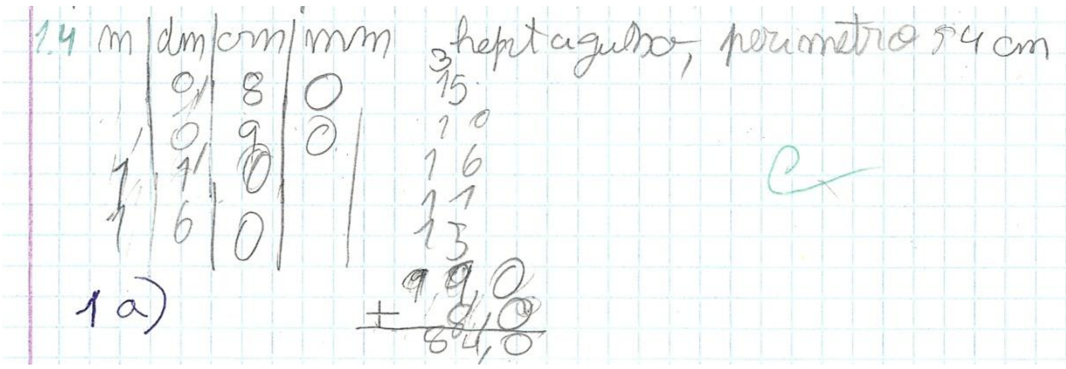
Professora: Isso é quando é a área.

Mariana: Pede o perímetro, é para fazermos em centímetros.

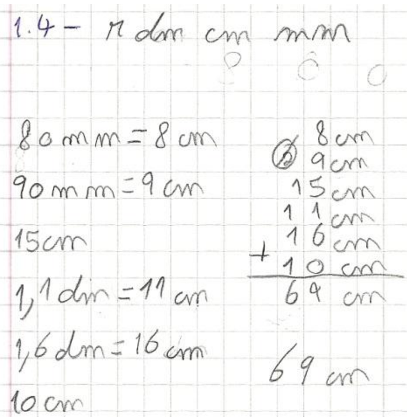
Ainda é notória alguma dificuldade em associar as grandezas à unidade de medida respetiva. Os alunos respondem sem pensar no significado do conceito de perímetro ou de área, levando a crer que se limitam a memorizar em vez de compreender que “perímetro corresponde centímetros e área corresponde a centímetros quadrados”.

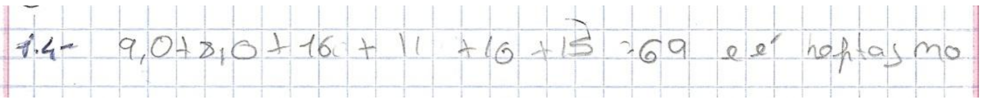
Para calcular o perímetro da segunda figura os alunos tinham de reduzir as unidades de medida, algo que ainda não tinham feito nas tarefas anteriores e conduziu a algumas dificuldades e erros de redução. Também se esquecerem de colocar as unidades de medida, o que neste caso era essencial porque as unidades de medida dos lados eram diferentes. No exemplo que apresento de seguida o aluno reduziu a milímetros mas como não há indicação da unidade de medida posso inferir que ele podia pensar que estava a reduzir a centímetros, até porque a questão solicitava que a unidade de medida fosse apresentada em centímetros. Deste modo o aluno não fez a conversão correta.

No próximo exemplo o aluno efetua corretamente as reduções de decímetros para centímetros mas de milímetros para centímetros não o faz corretamente na tabela apesar de o fazer na soma do comprimento dos lados.

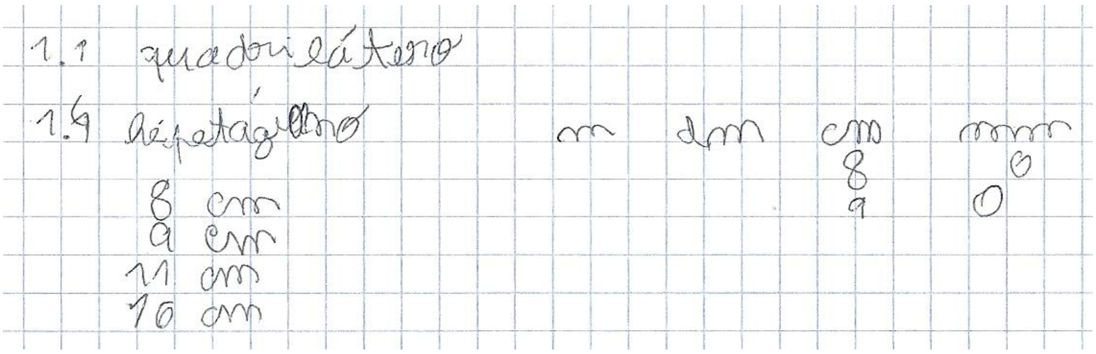


No caso seguinte os alunos esqueceram-se de adicionar um dos lados e no segundo exemplo não há indicação das reduções feitas nem da unidade de medida.

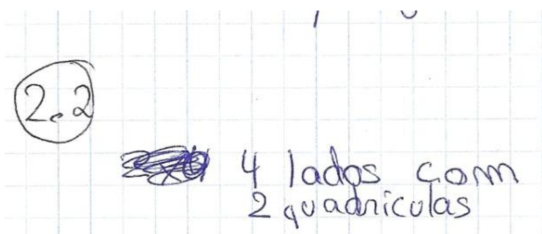


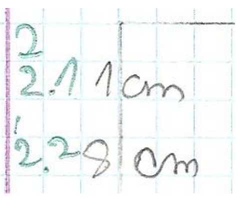


Neste caso o aluno só faz as reduções e classifica as figuras, sem determinar o seu perímetro.

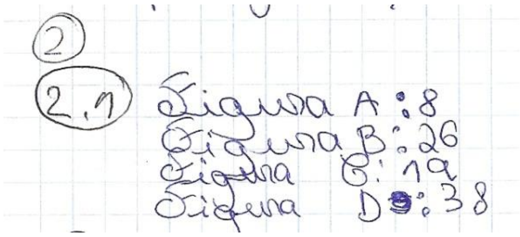


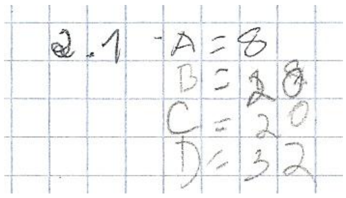
Tarefa 2. Os alunos revelaram dificuldades em interpretar a questão, não percebendo o significado da expressão “considera como unidade de medida o lado de uma quadrícula”. Unidade de medida continuava a revelar-se um conceito de difícil compreensão para os alunos, que continuam a pensar em unidades de medida como sendo apenas as do sistema métrico. As dificuldades de interpretação da questão também impediram os alunos de a resolver ou levaram-nos a apresentar respostas como as seguintes:



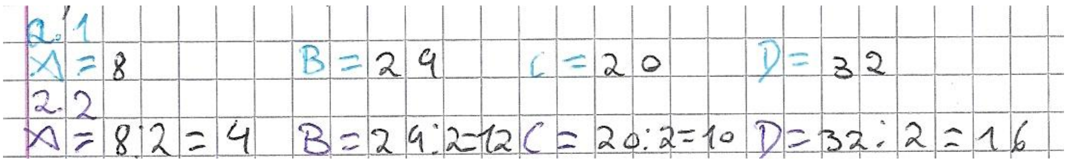


Alguns alunos também cometeram erros a contar os lados das quadrículas correspondentes ao perímetro da figura, mesmo na alínea a), como se pode verificar nas seguintes respostas:

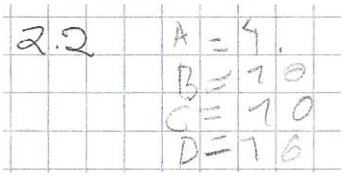




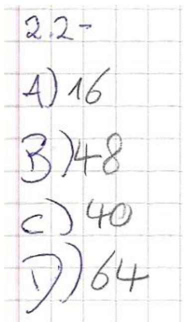
Na alínea b) as dificuldades aumentaram porque a unidade de medida era lado da figura A, que correspondia ao lado de duas quadrículas, ou seja, era o dobro da anterior. Mariana percebeu que o perímetro seria metade como se verifica na sua resposta:



Outro aluno estabeleceu a mesma relação, mas como se tinha enganado na determinação do perímetro na alínea a), foi concordante com o erro na alínea b).



Catarina percebeu que havia uma relação entre o perímetro anterior e o novo mas em vez de reduzir para metade passou para o dobro:



Na correção da tarefa esse erro foi discutido com toda a turma:

Professora: Agora na pergunta “2.2”, em vez da unidade de medida ser o lado de uma quadrícula é o lado do quadrado A (marcando uma linha em cima do lado do quadrado A, representado no quadro). (…) A Catarina está a dizer que é simples. O Rodrigo está a dizer: é metade. A Catarina o que é que diz? (…)

Catarina: Por exemplo, agora o lado A são dois. Os dois equivalem a um, que nós estamos a contar por isso temos de fazer vezes, o dois, aquilo que nos deu antes.

Professora: Então se o perímetro do A é oito tu dizes que agora o perímetro do A é dezasseis?

Catarina: Sim.

Professora: Tens dezasseis traços…

Rodrigo: Não.

Professora: …que ocupam duas quadrículas?

Catarina: Ai não.

Mariana: É metade.

Rodrigo: É metade.

Mariana: Tem de se dividir por dois. (…)

Rui: Tem de ser quatro.

Professora: Porque é que tem de ser quatro?

Catarina: Porque é metade de oito. (…)

Professora: E porque é que é metade? Porque é que agora o perímetro vai ser metade?

Mariana: Porque a metade é a dividir por dois e agora temos dois centímetros de lado.

Professora: Em vez de um centímetro de lado temos dois. Não é centímetros, é lados de quadrículas. (…) Porquê quatro? (…)

Professora: Qual é a minha unidade de medida? (…)

Catarina: É o lado do quadrado A.

Professora: É o lado do quadrado A. São quantos tracinhos?

Catarina e Rodrigo: Dois.

Professora: Dois tracinhos. Então eu tenho de contar o quê?

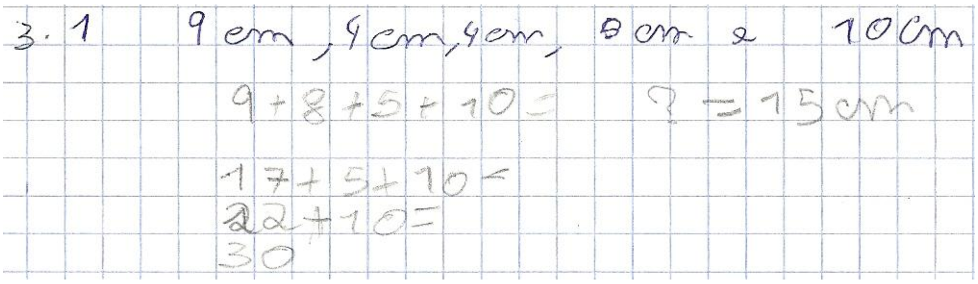
Rodrigo: Contar os tracinhos, os lados.

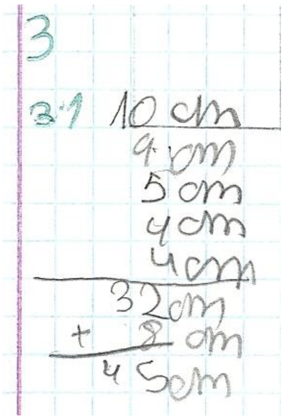
Catarina: Agora temos de contar de dois em dois.

Com a discussão e as ideias dos colegas, Catarina muda de opinião e apercebe-se da importância da dimensão da unidade de medida para determinar o perímetro da figura. Na correção e discussão desta tarefa os outros erros cometidos também foram visíveis, especialmente a dificuldade de contagem dos "tracinhos" à volta da figura (falta de técnicas de contagem). A dificuldade de compreender o enunciado da questão também se verificou.

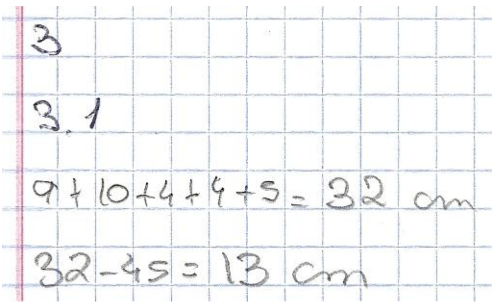
Tarefa 3. Nesta tarefa os alunos não revelaram muitas dificuldades e perceberam que podiam somar as medidas indicadas nas figuras e calcular a diferença entre a soma e o valor do perímetro para determinar a medida desconhecida. No entanto cometeram alguns erros, como:

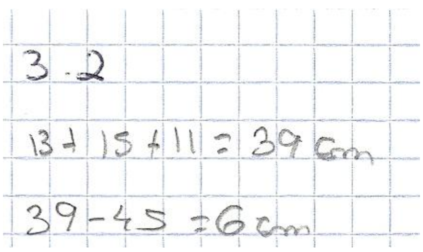
- Erros de cálculo;



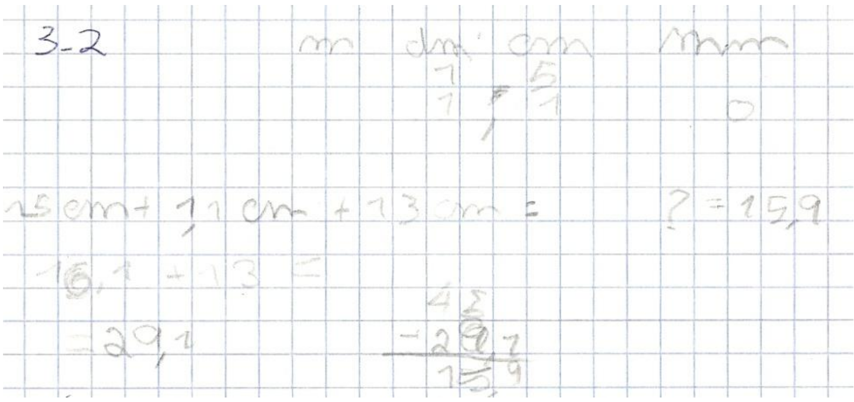


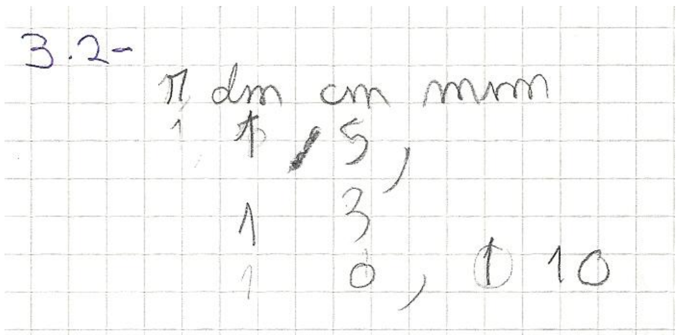
- Troca do aditivo com o subtrativo (note-se que neste ano de escolaridade os alunos ainda não trabalham com números negativos);

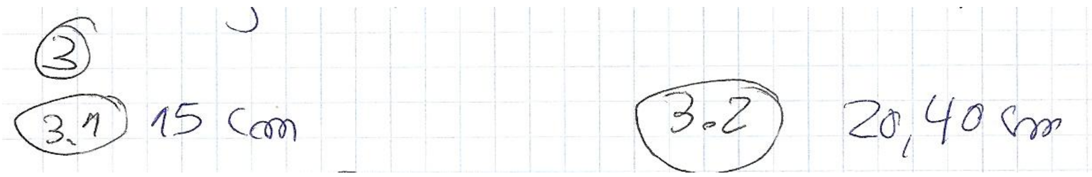




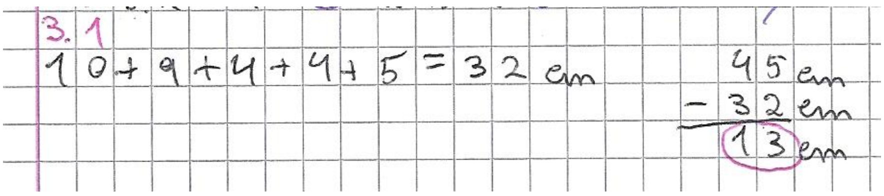
- Erros na redução das unidades de medida.





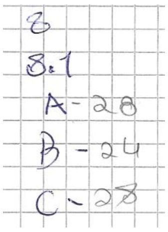


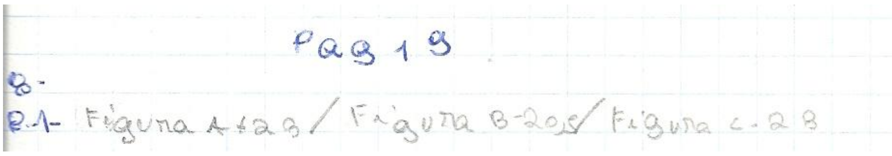
Mariana, à semelhança das tarefas anteriores, apresentou uma resposta completa com a indicação das unidades de medida.



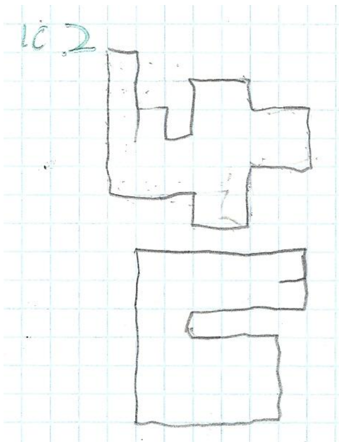
Tarefa 4. A maioria dos alunos que completou esta tarefa não apresentou dificuldades, contando as quadrículas do interior das figuras para calcular a sua área e verificando que duas das figuras tinham a mesma área e eram, por isso, equivalentes. Na discussão da tarefa, percebi que alguns alunos determinaram a área das figuras A e C decompondo-as, para facilitar a contagem das quadrículas correspondentes à área. Alguns alunos, dos que contaram as quadrículas uma a uma, enganaram-se na contagem. Na área da figura B surgiram diferentes valores errados porque não contabilizaram duas meias quadrículas como sendo uma, ideia sugerida por uma aluna

na correção da tarefa. Alguns dos alunos que entregaram a tarefa confundiram-se na contagem e apresentaram respostas como as seguintes:

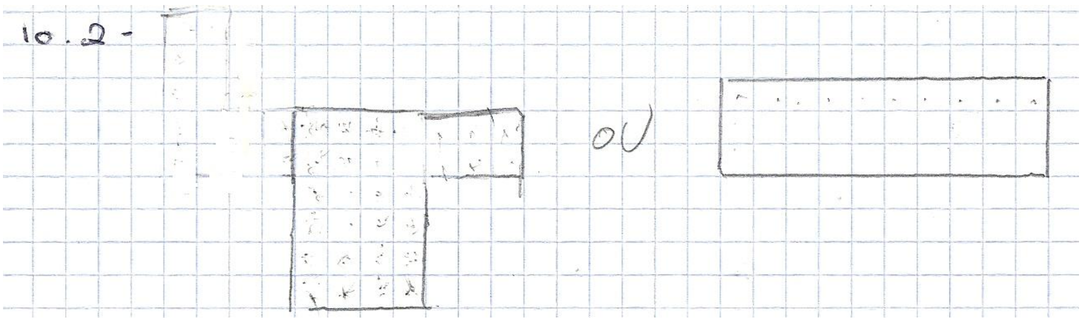


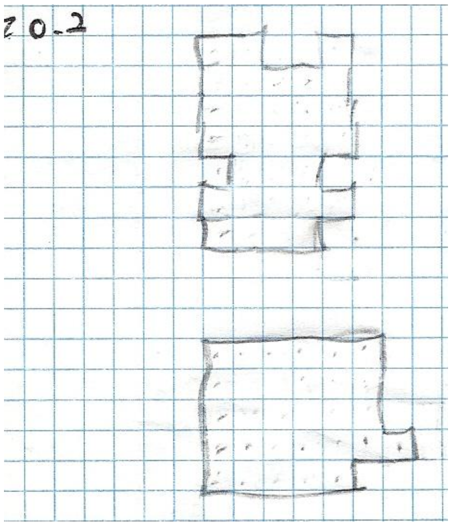


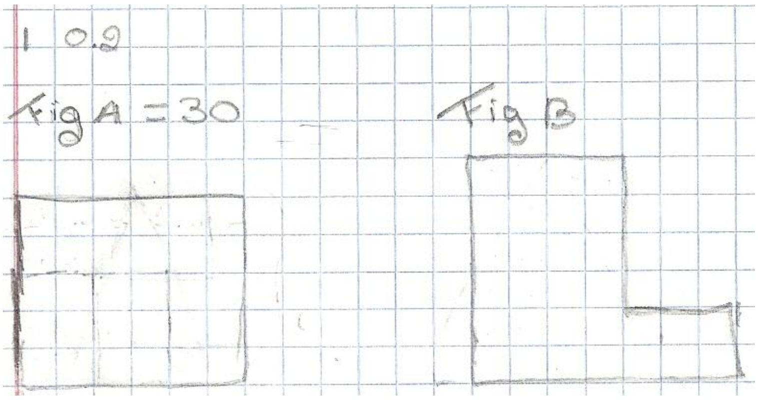
Tarefa 5. A alínea a) da tarefa foi realizada com sucesso pelos alunos, que desenharam a letra F com as mesmas dimensões mas em posições diferentes. No que diz respeito à alínea b) os alunos perceberam que as novas figuras não podiam ter a mesma forma mas sim a mesma área. Um aluno enganou-se na contagem das quadrículas, dando origem a figuras com área diferente da figura inicial como a do seguinte exemplo.



Das respostas corretas surgiram figuras como as seguintes:







Balanço. Nesta ficha de trabalho, com exercícios de aplicação e consolidação dos assuntos previamente trabalhados, foi possível verificar que os alunos ainda têm algumas dificuldades e cometem diversos erros. Foi percetível que a falta de compreensão do termo "unidade de medida" e o hábito de trabalhar com as unidades de medida do sistema métrico impediu alguns alunos de responderem corretamente às questões ou apresentarem respostas completas. Na maioria das respostas erradas os alunos apresentaram erros de redução nas unidades de medida e erros de cálculo ou contagem. Também apresentaram dificuldade em relacionar a medida do perímetro com a sua unidade de medida, não percebendo de imediato que, quanto maior a unidade de medida, menor o perímetro. Apesar dos erros cometidos e dificuldades demonstradas, os alunos já não calcularam a área quando era solicitado o perímetro e vice-versa. Mesmo não apresentando as unidades de medida não posso afirmar que os alunos ainda confundam área e perímetro. Nas questões relativas ao perímetro os alunos frisaram que se tratava da medida à volta da figura e nas questões da determinação da área, o seu interior. Creio que, nesta fase, os alunos já conseguem compreender e distinguir as noções de área e perímetro sem se centrarem numa fórmula que não compreendem ou sem se referiram ao retângulo. Também já reconhecem e constroem figuras equivalentes e congruentes, em diferentes posições e alguns alunos já decompõem figuras para obterem a sua área, em vez de contarem quadrículas, uma a uma.

5.2.5. Ficha de trabalho 5

A ficha de trabalho que agora analiso continha tarefas a realizar no Geogebra para os alunos descobrirem a relação existente entre o perímetro do círculo e o seu diâmetro, a fim de, a partir dessa relação, encontrarem e compreenderem a fórmula do perímetro do círculo. Tal como nas fichas de trabalho anteriores, os alunos demoraram muito tempo a realizar as tarefas e poucos foram os grupos que conseguiram tirar conclusões e registá-las.

A ficha foi introduzida com a revisão dos assuntos estudados nas fichas anteriores, como o perímetro e área do retângulo e do triângulo, à qual se seguiu a explicação do objetivo da nova tarefa – descobrir o perímetro do círculo. À questão o que é o perímetro, os alunos facilmente referiram que é "o que está à volta" e que, para medirem o perímetro de retângulos ou triângulos mediam à volta as figuras ou à volta dos lados. Como o círculo não tem lados, Mariana, a aluna estudo de caso, sugeriu que se podia pegar numa linha e colocar à volta do círculo, sendo o comprimento dessa linha a medida do perímetro. Outra aluna sugeriu usar um compasso o que despoletou a seguinte discussão:

Bárbara: Podemos usar um compasso.

Professora: Mas olha, o compasso, o que é que permite fazer?

Ana Lia: Circunferências.

Professora: E como é que eu consigo medir o comprimento dessa circunferência com o compasso?... O compasso só me serve para desenhar, não é? Faz alguma medição, o compasso?

Rui: Não.

Professora: O que é que eu consigo medir com um compasso?

Ana Lia: Nada.

Rui: Só se for para ver o raio.

Professora: Só se for para ver o raio ou o diâmetro. Muito bem. (Ana Lia coloca o dedo no ar) Diz lá Ana.

Ana Lia: Com o pi.

Professora: Com o pi. O que é que será isso do pi?

Rodrigo: É três, vírgula catorze e mais qualquer coisa.

Professora: É três, vírgula catorze e mais qualquer coisa. Já temos aqui algumas ideias. Para que é que será que ele servirá?

Nesta discussão é possível verificar que os alunos já tinham algumas ideias associadas ao círculo e à sua medição, através da sugestão do uso do compasso e de π e respetivo valor. Os alunos sabiam da existência deste valor e que estava associado ao perímetro e à área do círculo mas não sabiam de que modo e porquê. Os enunciados da ficha foram, então, entregues e as tarefas foram lidas e explicadas aos alunos, que reunidos em pares e distribuídos pelos computadores, deram início à sua execução.

As tarefas 1 e 2, construções no Geogebra, foram efetuadas por todos os grupos ao mesmo tempo, à medida que eu ia lendo e explicando em voz alta, interrompendo a explicação sempre que algum grupo não estava a conseguir realizar a construção, para o poder ajudar. As maiores dificuldades no manuseamento do programa surgiram na tarefa 3, onde os alunos tinham de introduzir uma fórmula na janela de *Entrada* do programa Geogebra, para determinarem o quociente entre o perímetro e o diâmetro do círculo construído. Ao escreverem a fórmula tinham de ser muito precisos com as maiúsculas e minúsculas, bem como com a acentuação, pelo que foi necessário ajudar os grupos um a um. A tecla da divisão (/) também não era conhecida pela maior parte dos alunos. Outro apoio foi necessário para que tomassem atenção à parte esquerda do ecrã onde aparecia o quociente pretendido e, portanto, o valor de π ou o próprio símbolo desta letra grega. Foi essencial chamar a atenção de todos os grupos neste sentido. Este apoio mais individualizado fez com que a tarefa demorasse mais tempo do que o previsto.

Tarefa 4. Nesta tarefa os alunos tinham de preencher uma tabela com os valores encontrados nas tarefas anteriores. Dos doze grupos formados, apenas um grupo não preencheu a tabela e outro grupo só preencheu a coluna do diâmetro não podendo, obviamente chegar a qualquer conclusão. Outros dois grupos preencheram apenas uma e duas linhas da tabela, respetivamente, o que também pode ter dificultado a obtenção e registo de conclusões, apesar de terem encontrado o valor de π. Um dos grupos preencheu apenas a coluna da direita (P: d) com o número 3,14, pelo que não foi possível inferir se os alunos obtiveram esse valor a partir da construção do círculo e respetiva manipulação, que possibilitasse a verificação válida da relação existente entre o perímetro e o diâmetro ou raio do círculo. Os restantes sete grupos preencheram a tabela, obtendo, todos, o mesmo valor na última coluna (3,14 ou π) como se pode verificar nas suas respostas:

Círculo	Diâmetro (d)	Raio (r)	Perímetro (P)	P : d
Círculo 1	8	4	25,13	3,14
Círculo 2	6,44	3,22	20.23	3,14
Círculo 3	23,98	11,99	75,35	3,14
…	0,68	0,34	2,13	3,14

Catarina, Ana Filipa, FT5 – Tarefa 4

Círculo	Diâmetro (d)	Raio (r)	Perímetro (P)	P : d
Círculo 1	2,43	[illegible]	7,63	3,14
Círculo 2	12	[illegible]	37,7	3,14
Círculo 3	23,07	[illegible]	72,32	3,14
…	23,88	[illegible]	75,35	π (pi)

Maria, Margarida, FT5 – Tarefa 4

Círculo	Diâmetro (d)	Raio (r)	Perímetro (P)	P : d
Círculo 1	2,43	5,20	7,63	3,14
Círculo 2	12	6	37,7	3,14
Círculo 3	23,07	8,99	72,32	3,14
…	23,88	11,99	75,35	3,14

João, Daniel M, FT5 – Tarefa 4

Círculo	Diâmetro (d)	Raio (r)	Perímetro (P)	P : d
Círculo 1	2,43	1,21,5	7.63	3.14
Círculo 2	3,87		12.16	3.14
Círculo 3	2,83	1,41,5	5,9	3,14
círcul…	6,84	3,42	[illegible]	3,14

Rafael, Diogo, FT5 – Tarefa 4

Círculo	Diâmetro (d)	Raio (r)	Perímetro (P)	P : d
Círculo 1	8	4	25.13	π
Círculo 2	11.17	5.585	35.11	3.14
Círculo 3	23.07	11.54	72.32	π
…	1.09	0.545	3.41	3.14

Mariana, Bárbara, FT5 – Tarefa 4

Círculo	Diâmetro (d)	Raio (r)	Perímetro (P)	P : d
Círculo 1	10,19	5,1	32,02	3,14
Círculo 2	12,64	6,32	39,72	3,14
Círculo 3	23,07	~~72,32~~	72,32	
…	23,88		75,35	

Rui, Rodrigo, FT5 – Tarefa4

Círculo	Diâmetro (d)	Raio (r)	Perímetro (P)	P : d
Círculo 1	14.57	7.29	45.74	3.14
Círculo 2	7.93	3.96	24.9	3.14
Círculo 3	3.13	1.57	9.84	3.14
…	19.19	9.6	60.29	3.14

Ana Lia, André, Leandro, FT5 – Tarefa4

Tarefa 5. A maioria dos alunos não conseguiu ter autonomia suficiente para concluir as construções com as indicações dadas na ficha, não tendo tempo para encontrar e registar relações com os dados preenchidos na tabela. Assim, apenas três dos sete grupos que concluíram a tarefa 4, encontraram relações a partir da observação dos dados da tabela e fizeram os seguintes registos:

5 – Que relação existe entre o perímetro e o diâmetro de um círculo?
Regista as tuas conclusões.

O P:D é sempre o mesmo mesmo que o diametro e o perimetro sejam diferente.
O diametro é mais 2x que o raio.

Ana Lia, André, Leandro, FT5 – Tarefa4

5 – Que relação existe entre o perímetro e o diâmetro de um círculo?

Regista as tuas conclusões.

R: A relação que existe entre o diâmetro e o perímetro do um circulo é que se dividirmos o diametro do perimetro vai dar o $\pi = 3.14$

Mariana, Bárbara, FT5 – Tarefa 5

5 – Que relação existe entre o perímetro e o diâmetro de um círculo?

Regista as tuas conclusões.

-> O raio é metade do diâmetro.

João, Daniel M, FT5 – Tarefa 5

Como se pode verificar, apenas o grupo de Mariana chegou à conclusão pretendida, apesar do grupo de Ana Lia também ter concluído que o quociente entre perímetro e diâmetro era sempre igual. A discussão da tarefa 5 só foi efetuada na aula seguinte, já na sala de aula regular e sem acesso ao programa Geogebra. As conclusões da ficha de trabalho foram discutidas na turma e registadas no quadro para que todos os alunos, mesmo os que não concluíram as tarefas, pudessem copiar para o caderno diário. Ao dinamizar a discussão pedi aos grupos para indicarem os valores obtidos na última coluna da tabela da tarefa 4, os quais indicaram ser sempre 3,14 ou π. Registei apenas os valores do diâmetro e do perímetro dos círculos de alguns grupos, construindo uma tabela semelhante no quadro. Apesar de não ter colocado a coluna correspondente ao raio, relembrei a relação existente entre raio e diâmetro, que os alunos facilmente referiram, tendo indicado, oralmente, os valores do raio para os diâmetros registados na tabela construída no quadro. Iniciei a discussão do seguinte modo:

Professora: Olhando aqui para esta tabela quem é capaz de me dizer já alguma conclusão? (…)

Ana Lia: Que mesmo quando o diâmetro e o perímetro são diferentes uns dos outros, o perímetro a dividir pelo diâmetro vai ser sempre o mesmo. (…)

Professora: O mesmo. Concordam? Alguém discorda daquilo que a Ana disse? (Ninguém se manifestou à exceção de um aluno que confundiu concordar com discordar). Então podemos registar esta conclusão. Toda a gente regista esta conclusão no caderno – Qualquer que seja o diâmetro do círculo, o perímetro a dividir pelo diâmetro tem sempre o mesmo valor. Mais conclusões que podemos tirar?

Catarina: O raio é metade do diâmetro.

Professora: O raio é metade do diâmetro. Tínhamos visto isso também observando a tabela.

Catarina: Também conseguimos observar que sempre que é perímetro vamos ter sempre vírgula. Não são inteiros.(…)

Professora: E porque será que isso acontece?

Ana Lia: É porque o π também não é um número inteiro.

Professora: Muito bem! Portanto (escrevendo no quadro), o perímetro nunca é um número inteiro e podemos já dizer aqui que o π não é um número inteiro.

Pedro: Será que o π a dividir pelo, o perímetro a dividir pelo π dá o diâmetro?

Professora: Exatamente. Tem a ver com a própria operação divisão, não é? Se eu tenho um dividendo a dividir pelo divisor dá o quociente não é? Então agora se tiver o dividendo a dividir pelo quociente vai-me dar o divisor, vai-me dar o diâmetro. Se eu dividir perímetro por π obtenho o diâmetro. Então como é que eu obtenho o perímetro? Se eu não quiser obter o diâmetro, quiser obter o perímetro o que é que eu tenho de fazer com os números?

Rodrigo: O diâmetro vezes o π.

Professora: Concordam? (…)

Professora: O diâmetro vezes o pi. Quanto é que é o π?

Alguns alunos: Três, vírgula catorze.

Professora: Três, vírgula catorze. Esquecendo o catorze é mais ou menos três, não é? (Oralmente e com os valores da tabela, verificou-se que o perímetro era cerca do triplo do diâmetro). Portanto, os números mais ou menos arredondados, se eu multiplicar o diâmetro mais ou menos por três vai dar o … (…)

Alguns alunos: Perímetro.

É interessante verificar a associação que Catarina e Ana Lia fizeram do perímetro com os números não inteiros, devido à existência de π e a intervenção de Pedro permitiu explorar a operação divisão e levar os alunos a estabelecer relações entre os vários elementos desta operação e encontrar a fórmula do perímetro do círculo. Após a discussão, os alunos registaram as conclusões obtidas no caderno e alguns alunos começaram a questionar a fórmula da área do círculo e a especular acerca da mesma, indagando se seria o raio vezes π. Para que não se confundissem sugeri que essa discussão ficasse para aula seguinte mas aproveitei o facto de mencionarem o raio para o relacionar com o perímetro do círculo:

Professora: Se eu não tiver o valor do diâmetro, se eu tiver o raio?

Bárbara: Temos de fazer duas vezes o raio.

Professora: Muito bem Bárbara. Temos de fazer duas vezes. Para calcular o perímetro da circunferência como é que eu faço? Como é que eu calculo o perímetro da circunferência se eu tiver só o raio?

Rodrigo: Raio, vezes raio, vezes raio, vezes π.

Professora: Raio vezes raio?

Ana Lia: Não.

Catarina: Raio, vezes raio, vezes π.

Rodrigo: Raio mais raio vezes π.

Mariana: O raio é metade do diâmetro.

Professora: Então em vez do diâmetro tem de ser o quê?

Catarina: Raio vezes, raio vezes dois.

Professora: Ah, então vezes dois não é vezes o raio. O raio vezes o raio é um número. Dois vezes o raio é outro número diferente, não é? Raio mais raio ou raio vezes?

Alguns alunos: Dois.

Professora: E depois tenho de multiplicar pelo π. Sim? Dúvidas? (Ninguém se manifestou).

Apesar de confundirem o dobro do raio com o quadrado do raio (raio vezes raio/ raio vezes dois) os alunos conseguiram encontrar um modo de calcular o perímetro do círculo a partir do raio, em vez do diâmetro, pois conseguiram relacionar o raio com o diâmetro. Os alunos registaram a conclusão obtida no caderno e, para que consolidassem esta nova aprendizagem e perceber se restavam ou não algumas dúvidas, apesar de não ter previsto inicialmente, sugeri que resolvessem algumas tarefas do seu manual escolar. Assim sendo surgiu a ficha de trabalho 5 A.

Balanço. Uma vez mais, a tarefa só foi concluída e discutida na aula seguinte e sem recuso ao Geogebra. Nesta ficha de trabalho os alunos necessitaram de apoio individualizado para efetuarem as construções no Geogebra, dada a sua complexidade, especialmente da tarefa 3. Nem todos os grupos concluíram a tarefa 4 e apenas três grupos registaram conclusões na tarefa 5. Esperava que os alunos, através da manipulação das construções no Geogebra e visualização do valor de π e respetivo símbolo no programa, descobrissem a relação existente entre o diâmetro e o perímetro do círculo, a fim de encontrarem a fórmula do perímetro do círculo através da manipulação deste recurso informático. Infelizmente, e pelos motivos já referidos, só foi possível levar os alunos à descoberta da fórmula na discussão final da ficha de trabalho. Nesta discussão participaram poucos alunos, como já vem sendo habitual nesta turma, mas várias intervenções foram interessantes e permitiram aos alunos estabelecer relações entre raio, diâmetro, perímetro e π. Os alunos foram construtores da sua aprendizagem na medida em que exploraram e discutiram formas de obter o perímetro do círculo ao invés de decorarem a fórmula indicada pela professora. A descoberta em detrimento da memorização da fórmula do perímetro do círculo revelou ser mais apelativa para os alunos uma vez que partiu do seu interesse e das suas intervenções. A discussão final também despoletou o interesse dos alunos para novas aprendizagens, como a área do círculo.

5.2.6. Ficha de trabalho 5 A

Esta ficha de trabalho surgiu no decurso da ficha de trabalho 5, com o objetivo de consolidar a aprendizagem relativa ao perímetro do círculo, permitindo que os alunos continuassem a trabalhar este conceito com exercícios do seu manual escolar, a fim de esclarecerem eventuais dúvidas.

Tarefa 1. Os alunos tinham de indicar se algumas expressões referentes ao raio, diâmetro e perímetro do círculo eram verdadeiras ou falsas e justificar as falsas. As dúvidas que surgiram durante a execução desta tarefa relacionaram-se com: (i) a distinção entre raio e diâmetro; (ii) a necessidade ou não de usar o π para comparar estas duas medidas; (iii) a fórmula do perímetro do círculo, onde fizeram, por exemplo, o raio × π em vez de diâmetro × π; e (iv) determinar o valor de π ou do diâmetro do círculo partindo do valor do perímetro. Durante a discussão da tarefa, que foi executada no quadro por alguns alunos, não surgiram mais dúvidas.

Tarefa 2. Nesta tarefa os alunos deveriam calcular o perímetro de uma pista contendo dois segmentos de reta e dois semicírculos congruentes. Alguns alunos usaram o valor trinta metros como o perímetro do semicírculo em vez do raio.

Aquando da discussão da tarefa, a aluna que foi ao quadro sabia que necessitava de calcular o perímetro da figura mas para o fazer começou por somar duas vezes as medidas indicadas na figura (comprimento do retângulo e raio do círculo) como se pode ver na figura 12:

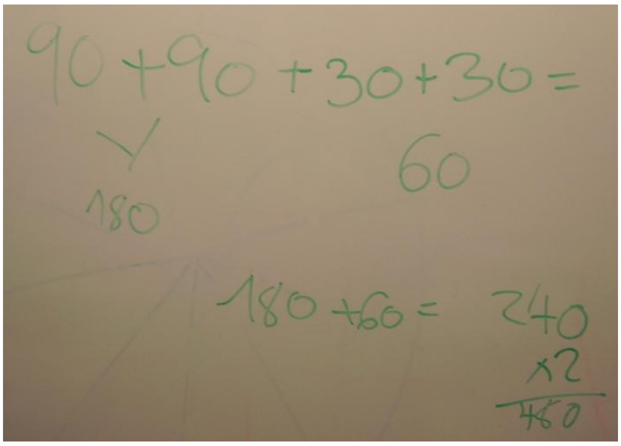


Figura 12. Resposta de Bárbara na tarefa 2.

A discussão foi, então, iniciada:

Professora: Então, agora, a Bárbara vai explicar em voz alta que contas é que está ali a fazer.

Bárbara: É noventa mais noventa mais trinta mais trinta, é o perímetro.

Professora: O que é que é esse noventa?

(Bárbara começa a apagar)

Professora: Não, deixa ficar, deixa ficar para discutir. Quem é que concorda com o que a Bárbara fez?

(Dois alunos colocam o dedo no ar.)

Professora: Quem é que não concorda?

Ana Lia: Eu não percebo.

Professora: A Bárbara tem: noventa mais noventa mais trinta mais trinta. Aqui utilizou a propriedade associativa, fez logo noventa mais noventa, cento e oitenta e trinta mais trinta, sessenta. Cento e oitenta mais sessenta, vai dar duzentos e quarenta, não é? Bárbara e acabaste aqui o teu problema?

Bárbara: Não. Tenho de fazer o duzentos e quarenta a dividir por dois.

Professora: Porquê dividir por dois?

(A aluna não conseguiu apresentar uma justificação).

Professora: Bárbara a tua resposta era essa, duzentos e quarenta? A resposta final era isso?

Bárbara: Não. Agora tinha de dividir por dois.

Professora: Mas porque é que tinhas de dividir?

Bárbara: Tínhamos de fazer duzentos e quarenta e depois por pi.

João S: Não. Para que é que é essas medidas todas?

Professora: Se já estás a somar as medidas todas porque é que ainda vais fazer isso vezes π? … Serve-te para quê? … O que é que o problema te pede? … O que é que o problema pede? Qual é a pergunta?

Apesar de Bárbara saber que tinha de determinar o perímetro não teve em consideração que se tratava de uma figura composta, optando por somar os valores indicados na figura e calculando o perímetro como se se tratasse de um retângulo cuja largura correspondia ao raio do círculo. Fiz com que a discussão voltasse a incidir na resposta que estava no quadro. Os alunos começaram a discutir o resultado e Bárbara fez o cálculo no quadro afirmando que a tarefa estava concluída. Sugeri que se sentasse e continuei a discutir a resposta da aluna. João explicou por outras palavras mas concordou com a resposta de Bárbara e Daniel M. tinha, somado os valores novamente e depois ainda multiplicou por dois.

Professora: Quem fez de outra maneira?

Ana Lia: Eu fiz, os duzentos e quarenta, em vez de multiplicar por dois multipliquei por três, vírgula catorze, o π.

Professora: Então aquilo que tu fizeste foi: o duzentos e quarenta seria o diâmetro de uma circunferência e estarias a calcular o perímetro da circunferência? … Então o campo é uma circunferência?

Catarina: Não.

Professora: E o duzentos e quarenta é o diâmetro dessa circunferência?

Catarina: Mas não acabou professora porque nós só estamos a medir o perímetro daquela circunferência, porque ainda vamos medir o outro bocado.

Professora: Como é que se mede o perímetro da circunferência?

Catarina: É o π vezes diâmetro.

Professora: É o π vezes o diâmetro e qual é o diâmetro da circunferência? Qual é o diâmetro da circunferência que aí está?

Mariana: É sessenta.

Professora: Porque é que é sessenta "Mariana"?

Mariana: Porque a figura está a dizer, aquele trinta que está lá é o raio. Por isso temos de fazer trinta mais trinta que é igual a sessenta.

Professora: Ah! Então o trinta que está na figura está-se a referir ao?

Mariana: Raio.

Professora: Ao raio. Toda a gente a olhar para a figura.

Pela discussão verifiquei que outros alunos cometeram o mesmo erro que Bárbara e chegaram ao valor duzentos e quarenta. Entretanto começaram a discutir que o problema pedia a distância percorrida em duas voltas e que se devia multiplicar o resultado por dois, o que ainda os confundiu mais. As intervenções de Mariana (aluna estudo de caso) foram essenciais para encaminhar os colegas para a solução pretendida e permitiu explorar os vários valores representados na imagem da tarefa e respetivo significado e utilidade para a resolução correta. Com o auxílio do esquema que desenhei no quadro (figura 13) incentivei os alunos a refletirem acerca do que já tinha sido discutido, no sentido de os alertar para o significado da soma dos valores e da noção de perímetro da figura.

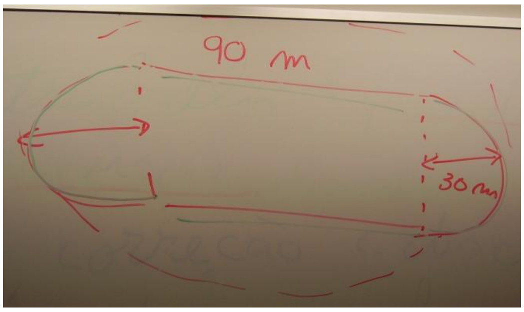


Figura 13. Esquema desenhado no quadro relativo à tarefa 2.

Mariana foi ao quadro registar a sua resposta (figura 14) e explicou aos colegas, mas Pedro também cometeu o erro de julgar a figura como um único círculo.

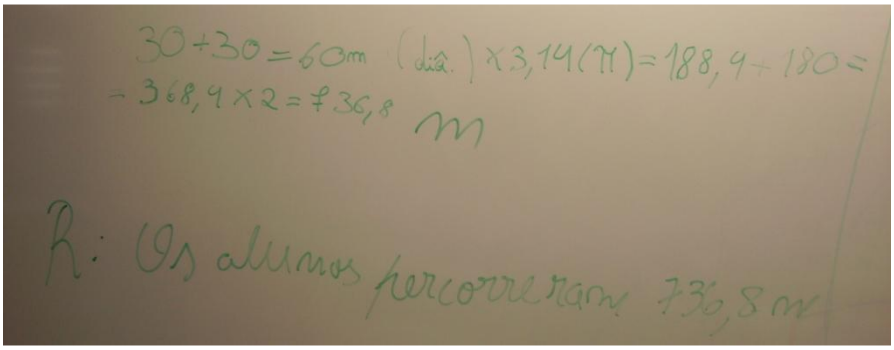


Figura 14. Resposta de Mariana na tarefa 2.

Eis a discussão final que ocorreu:

Mariana: Eu fiz trinta mais trinta igual a sessenta, de diâmetro.

Professora: Então escreves aí que é o diâmetro. Olha e põe a unidade de medida. Qual é a unidade de medida?

Mariana: Metros.

(Pedro coloca o braço no ar).

Professora: Diz lá Pedro. Fizeste como a “Mariana”?

Pedro: Eu fiz assim, noventa mais sessenta porque eu, porque eu fiz o diâmetro.

Professora: Então juntaste o diâmetro com um lado do retângulo?

Pedro: Não, calculei que o diâmetro fosse cento e cinquenta porque noventa metros mais trinta mais trinta, ou seja, faz cento e cinquenta e depois fiz vezes o π.

Professora: Mas aí consideraste que havia aqui uma circunferência gigante e aqui não temos uma circunferência gigante. Temos uma circunferência e aqui temos um retângulo. Eu não posso juntar esta linha do retângulo com o diâmetro da circunferência que ali está.

Tentei explicar ao aluno porque não poderia resolver a questão daquela forma e pedi a Mariana que continuasse a sua explicação.

Professora: A figura não é só uma circunferência. Também tem o retângulo lá. E se eu quero o perímetro interessa-me aqui estes dois comprimentos, estes dois lados deste retângulo, que eu tenho de juntar no fim, por exemplo. Foi isso que fizeste “Mariana”? Juntaste estes noventa no fim?

Mariana: Sim.

Professora: Então continua a fazer.

Mariana: Depois fiz vezes três, vírgula catorze, que é o pi e depois…

Professora: E assim, com isso, calculaste o quê?

Mariana: Calculei o perímetro do círculo. (…) E depois eu fiz mais o cento e oitenta, que é do noventa mais o noventa.

Professora: Então escreve. Estão a acompanhar o raciocínio da "Mariana"?

Mariana: E a seguir fiz vezes dois porque eles vão dar duas voltas.

Professora: Muito bem!

Mariana foi clara e sucinta na explicação do seu raciocínio e conseguiu compreender os vários dados da tarefa e aplicá-los corretamente na sua resolução. Revelou compreender o significado de perímetro em qualquer figura e aplicou os conhecimentos previamente adquiridos e trabalhados nas aulas anteriores. Voltei a explicar pormenorizadamente a resolução da tarefa, questionando os alunos acerca do que tinha sido explorado anteriormente e, no fim, pedi-lhes que registassem, no caderno, o que estava no quadro, sistematizando todo o raciocínio envolvido na tarefa.

Tarefa 3. Os alunos tinham de calcular o comprimento das linhas vermelhas das figuras o que levou a alguns erros, especialmente na primeira figura, que correspondia a dois semicírculos e mais duas linhas que os alunos tinham de juntar e não o fizeram. Também calcularam o comprimento das linhas como se fossem círculos inteiros, não dividindo por dois.

Aquando da discussão da resolução da tarefa, na primeira figura, Pedro calculou o perímetro dos dois semicírculos e no final juntou-os com os dois centímetros das linhas que uniam as duas semicircunferências, mas durante a resolução ainda confundiu as unidades de medida, usando centímetros quadrados. Voltei a explicar a diferença entre unidades de comprimento e unidades de área e o aluno retificou a sua resposta como se pode verificar na figura 15:

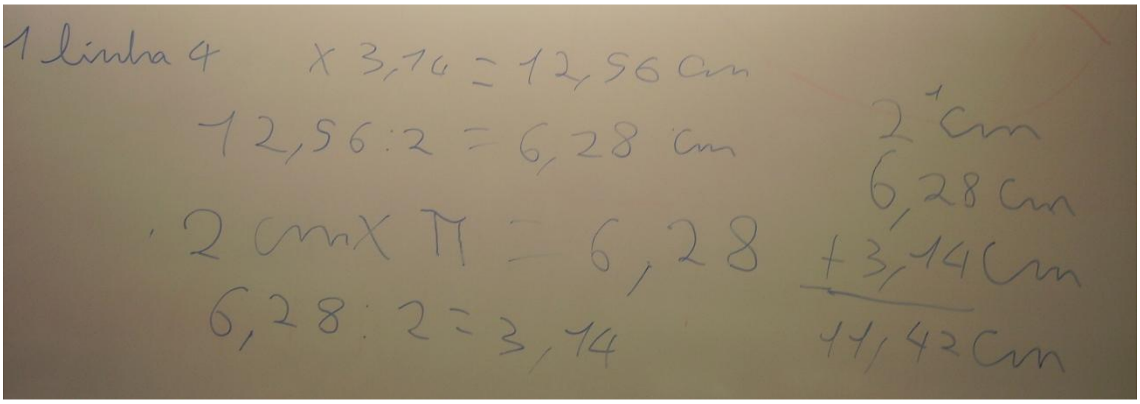


Figura 15. Resolução da tarefa 3 de Pedro.

Como alguns alunos tinham terminado a resolução das tarefas em casa, Hugo afirmou ter tido ajuda de sua mãe, mas resolveu a tarefa de modo diferente. Na figura 16 pode observar-se a resposta de Hugo.

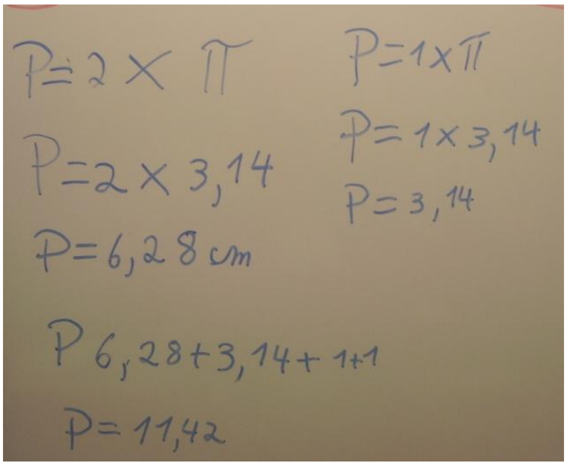


Figura 16. Resolução de Hugo na tarefa 3.

A resolução de Hugo gerou uma discussão bastante interessante, permitindo aos alunos descobrirem que ao produto do raio de um círculo por π, correspondia o perímetro da semicircunferência.

Professora: Vamos tentar perceber o que está ali no quadro. Ele tem o cálculo de um perímetro em que tem dois vezes o π. Tem o cálculo de outro perímetro em que tem um vezes o π e depois junta estes dois perímetros e junta um e o um daqui (apontando para a figura). Até aí tudo bem. Agora, Hugo, onde é que foste buscar aqui este dois?

Como Hugo não conseguiu explicar o que tinha feito, confundindo os dois centímetros do raio do círculo maior com os dois centímetros que juntou no fim, para calcular o comprimento das linhas vermelhas, tentei levar os alunos a encontrarem diferenças nas duas resoluções, a fim de tirarem as suas próprias conclusões.

Ana Lia: O Hugo, em vez de fazer as contas e dividir isso tudo, foi logo fazer, dividiu logo aquilo por dois e depois multiplicou por π.

Professora: Exatamente, ou seja, muito bem! O Hugo dividiu logo por dois e ao dividir logo por dois o que é que ele fez? Em vez de usar a medida do diâmetro usou que medida?

Alguns alunos: O π.

Professora: Isso todos eles usaram. O π é os três, vírgula catorze.

Mariana: O perímetro.

Professora: Qual perímetro?

Rafael: O raio.

Professora: O raio! É ou não é? Reparem lá. Este quatro e este dois que o Pedro usou nas duas circunferências foi o diâmetro. (…) O que é que o Hugo com estes cálculos estaria a mostrar? Ele utilizou, em vez da medida do diâmetro, usou o raio dois e estaria a calcular para uma circunferência com metade do tamanho, ou seja, não precisa de dividir por dois no fim. Nós podemos tirar outra conclusão daqui. Esta resolução foi interessantíssima porque ele, ao usar a medida do raio, depois o que é que ele dispensou? Não fez o quê? O que é que ele não precisou de fazer?

Mariana: Dividir.

Professora: Dividir por?

Alguns alunos: Dois.

Professora: Dois, porque já está a usar metade do diâmetro. Ao usar metade do diâmetro está a usar a medida do?

Alguns alunos: Raio.

Professora: Então acabámos de descobrir uma maneira de calcular o quê? O perímetro?

Mariana: De uma semicircunferência.

Com esta discussão os alunos puderam concluir que podiam obter o perímetro de uma semicircunferência multiplicando o raio por π. Já na segunda imagem da tarefa, a resolução tornou-se mais simples, porque não havia semicírculos, apenas um círculo grande e dois círculos mais pequenos e congruentes. Mesmo assim, Ana Lia ficou confusa com o exercício anterior e ao explicar como resolveria referiu usar o raio e no fim multiplicar por dois. Mostrei aos alunos que a imagem continha círculos inteiros e não haveria necessidade de complicar, podendo-se usar a fórmula do perímetro do círculo. Fui questionando os alunos e escrevendo a resolução mais simples no quadro como se vê na figura 17.

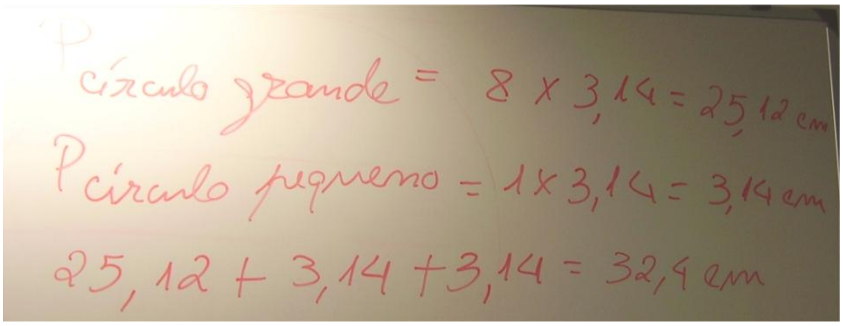


Figura 17. Resolução da figura B da tarefa 3.

Balanço. Ao longo da resolução/discussão desta ficha de trabalho percebi que os alunos ainda tinham muitas dúvidas no que respeita ao perímetro de círculos, que se agravaram nas tarefas 2 e 3, de complexidade um pouco maior, uma vez que não requeriam apenas o uso direto da fórmula do perímetro do círculo. De facto, não era meu objetivo que os alunos decorassem uma fórmula que não percebiam mas, considerando as dificuldades demonstradas, os alunos não usufruíram da sua utilidade. Deste modo, a tarefa 1 foi útil para relembrar a relação entre o diâmetro e o perímetro do círculo, bem como a relação entre raio e diâmetro (assunto trabalhado no período anterior), tendo em conta os erros cometidos e discussão desta tarefa.

Na tarefa 2 os alunos apresentaram diferentes resoluções mas apenas Mariana teve sucesso. A maioria dos outros alunos entendeu a figura como um círculo único, somando as medidas indicadas e multiplicando por π no final. Os alunos revelaram dificuldade em distinguir as várias partes da figura, juntando o perímetro dos dois semicírculos congruentes, que formavam, por isso, um círculo, e o retângulo. Apesar dos erros cometidos, os alunos perceberam que tinham de calcular o perímetro e não a área, por ser uma distância percorrida em redor da pista representada, revelando já algum entendimento deste termo e além disso, também se lembraram que teriam de duplicar o valor do perímetro por se tratar de duas voltas. Mesmo confundindo, ainda, as unidades de medida, os alunos referiram-se apenas ao perímetro.

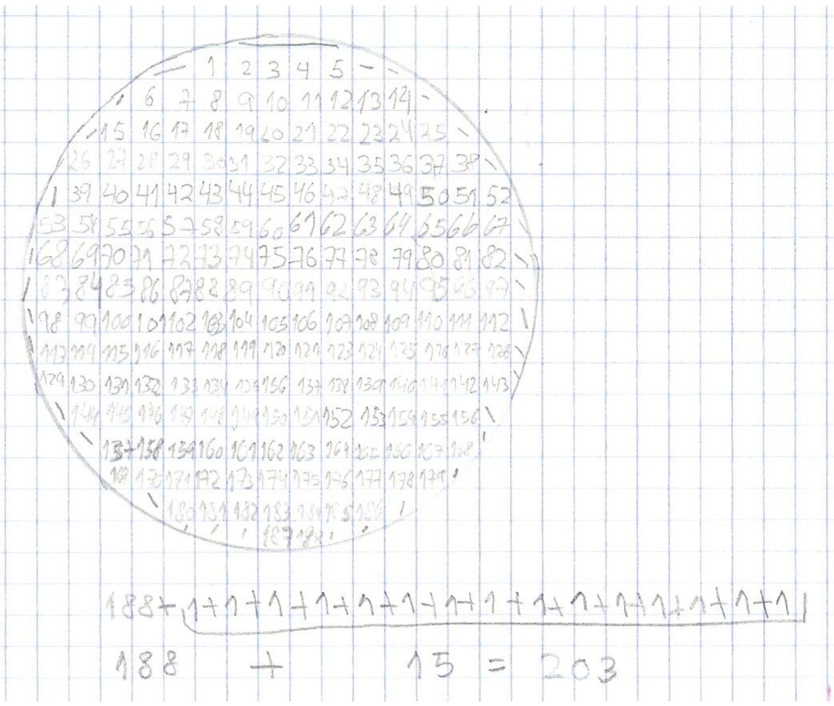
No que respeita à tarefa 3, especialmente na figura A, revelaram alguma dificuldade em distinguir círculos de semicírculos, confundindo a medida do raio e do diâmetro mas a discussão da tarefa foi muito interessante, permitindo inferir a fórmula do perímetro do semicírculo. Não posso afirmar que a resolução que deu origem a esta discussão tenha tido esse intuito porque o aluno não conseguiu explicar-se e pode ter surgido de dois erros: (i) calcular o perímetro do círculo usando raio $\times$ π; e (ii) considerar o perímetro dum círculo igual a um semicírculo. De qualquer modo a discussão dos vários modos de resolução das tarefas permitiu explorar as várias relações entre as grandezas que estavam a ser estudadas orientando os alunos para o estudo do perímetro do círculo, promovendo a compreensão deste.

5.2.7. Ficha de trabalho 6

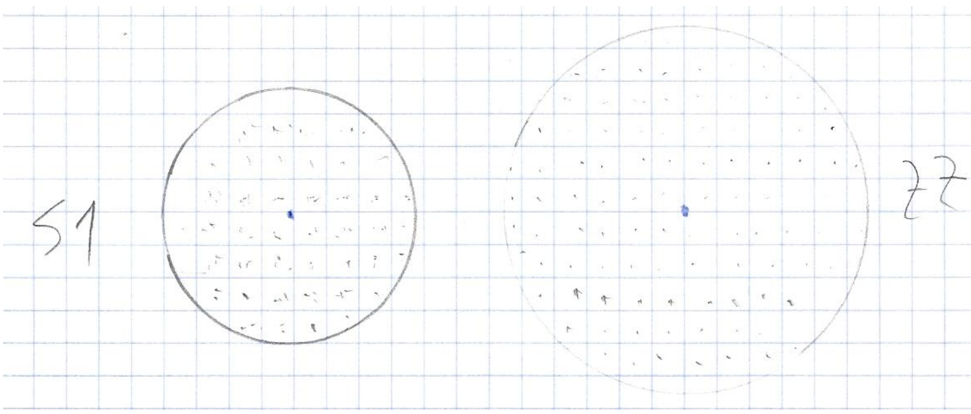
Com as tarefas desta ficha procurei levar os alunos a relacionarem o raio de um círculo com a sua área, no sentido de os preparar para a aprendizagem da área do círculo, sem o uso direto da fórmula, para que investigassem e comparassem o raio com a área do círculo e tirassem as suas conclusões. A ficha foi realizada em pares e trios, de acordo com a disposição dos alunos na sala, resultando na formação de grupos diferentes das tarefas anteriores. Os alunos dispunham de papel quadriculado, régua, compasso e calculadora para resolverem a ficha, que só continha uma tarefa dividida em cinco alíneas, em que a última previa a repetição das atividades anteriores para círculos com diferentes dimensões.

À semelhança da introdução das fichas de trabalho anteriores discuti com os alunos o que tinha sido trabalhado e os assuntos abordados nas aulas anteriores e os alunos referiram-se: (i) ao perímetro do círculo, dizendo que se calculava multiplicando o diâmetro por π ou raio + raio $\times$ π; (ii) ao valor de π; e (iii) recordaram que trabalharam áreas e perímetros, nomeadamente a área do triângulo. Mariana referiu que para calcular a área do triângulo se calculava a área do retângulo e depois se dividia por dois e, deste modo, também foi recordada a fórmula da área do triângulo e da área do retângulo, bem como a noção de altura de triângulo.

Antes de iniciarem a resolução da ficha de trabalho propriamente dita, entreguei as folhas quadriculadas e sugeri que, com o compasso, desenhassem um círculo na folha quadriculada e tentassem encontrar um valor aproximado/estimado para a área do círculo desenhado. Recordando a noção de área e das suas unidades de medida, em discussão, os alunos sugeriram que podiam calcular a área do círculo por contagem aproximada do número de quadrículas que se encontravam no seu interior. Como os alunos estavam a ter dificuldade e fazer a contagem, porque desenharam círculos muito grandes, sugeri que desenhassem retângulos no interior dos círculos e juntassem as várias áreas. Nem todos os grupos seguiram a minha sugestão. De seguida apresento as respostas de alguns grupos a esta atividade inicial.

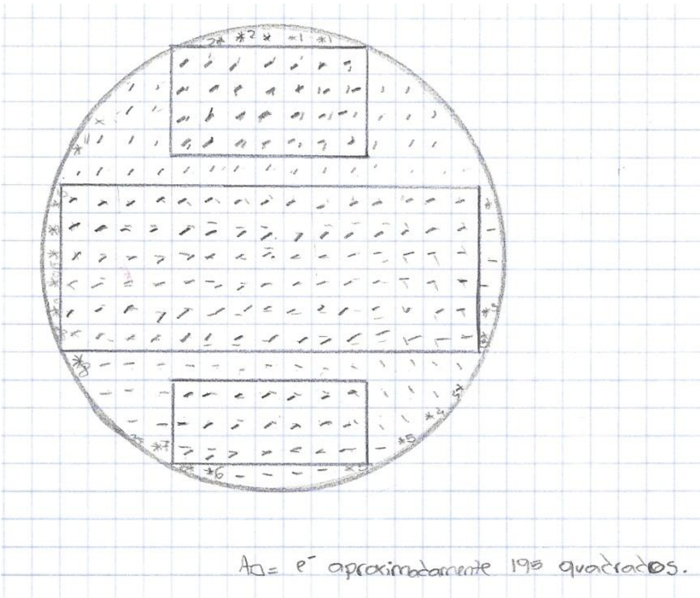


João, Rui e Gonçalo



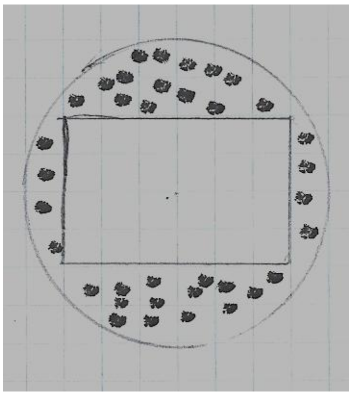
André, Maria e Iris

Estes dois grupos fazem a contagem das quadrículas uma a uma, tentando encontrar um valor aproximado da área do círculo de modo exaustivo e sem técnicas de contagem. Na resposta do grupo seguinte já há uma tentativa de encontrar uma forma mais fácil de contagem, desenhando retângulos dentro do círculo, tal como eu tinha sugerido, mas não há evidência do uso dessa técnica, pois continuam a apresentar a contagem de todas as quadrículas do interior do círculo desenhado.

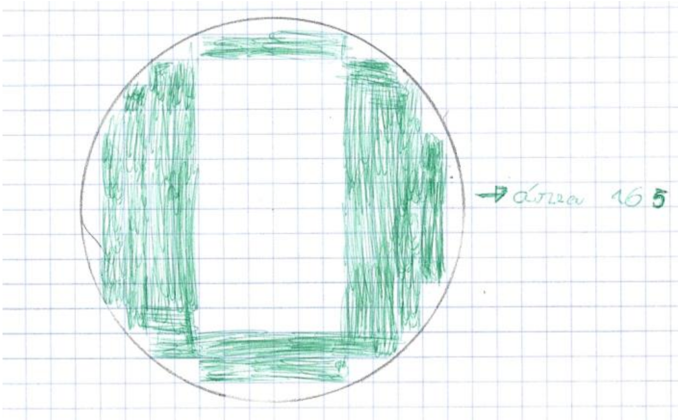


Lucas e Hugo

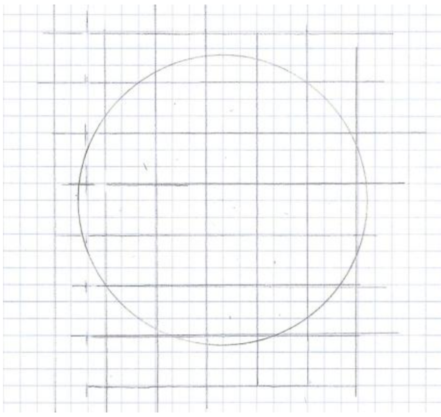
Os três grupos seguintes tentam dividir o círculo em quadrados ou retângulos mas não apresentam valores para a área dessas divisões e a respetiva soma.



Ana Lia e Daniel M.

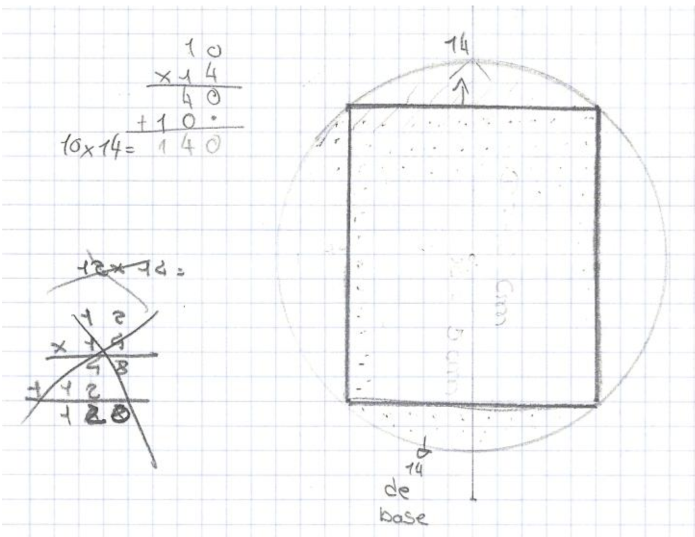


Rodrigo e Rafael

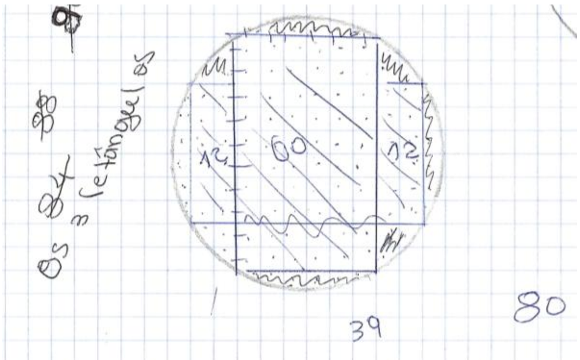


Mariana e Pedro

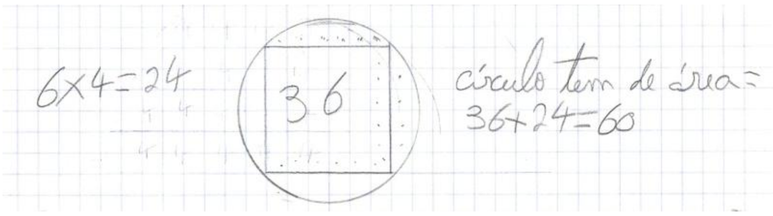
Finalmente, nas respostas dos próximos grupos já há evidência de técnicas de contagem mais rápidas e eficazes, com a construção de retângulos no interior do círculo e indicação da sua área.



Bárbara e Ricardo



Daniel e Miguel



Catarina e Lara

Com esta tarefa, os alunos perceberam que a técnica de contagem de quadrículas no interior do círculo para a determinação da sua área não era a mais rápida e eficaz e, como demonstraram alguma dificuldade em encontrar a área dos círculos desenhados, optei por iniciar a tarefa prevista para a ficha de trabalho 6, que continha círculos mais pequenos. Distribuí as fichas de trabalho e expliquei, em voz alta, os procedimentos a adotar por todos os grupos. Enquanto explicava a ficha pedi aos alunos para fazerem algumas previsões. Mariana previu que, relativamente à alínea c), o raio do círculo era igual ao lado do quadrado e Pedro, na alínea d) previu que a área do quadrado B era um quarto da área do quadrado A, o que suscitou a discussão do significado da expressão “um quarto”.

Pedro: O quadrado B é um quarto do quadrado A.

Professora: Concordam? O que é que é isso de ser um quarto?

Rodrigo: É uma das metades.

Professora: É uma das metades? Um quarto é uma das metades.

Rodrigo: Não. Metade da metade.

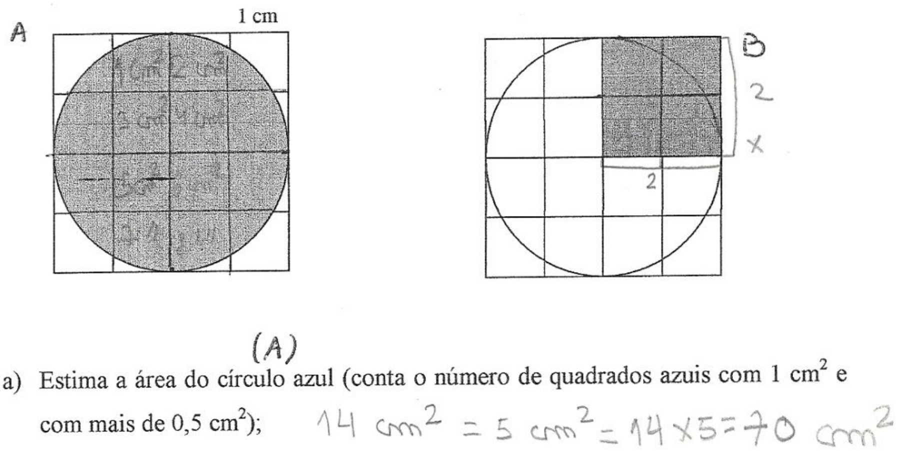
Professora: Metade da metade.

Ana Lia: Uma das quatro partes.

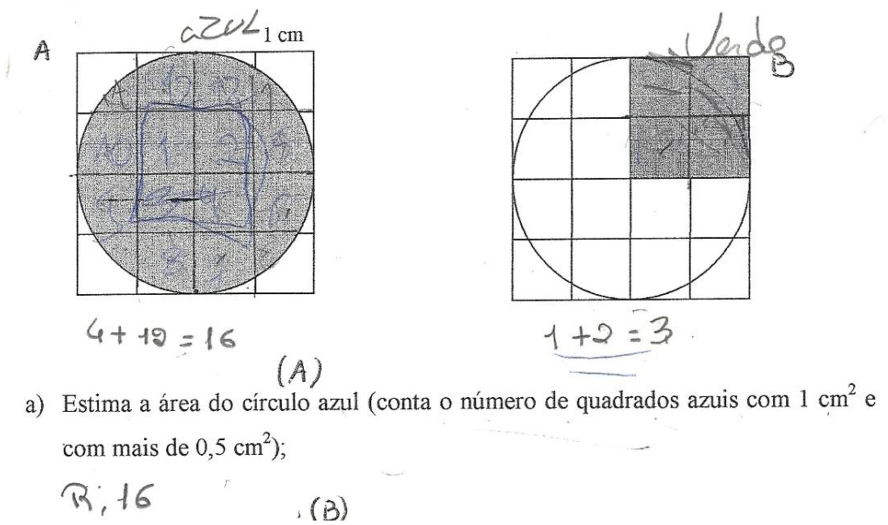
Professora: Uma das quatro partes. Boa! Vamos ver. Vamos comparar com os valores que vocês obtiverem.

Rodrigo e Ana Lia referiram-se à expressão "um quarto" de modo diferente mas ambos corretamente, o que permitiu posteriormente explorar a previsão de Pedro, que o quadrado teria um quarto da área do círculo. De seguida, os alunos iniciaram a atividade e eu fui auxiliando os diversos grupos.

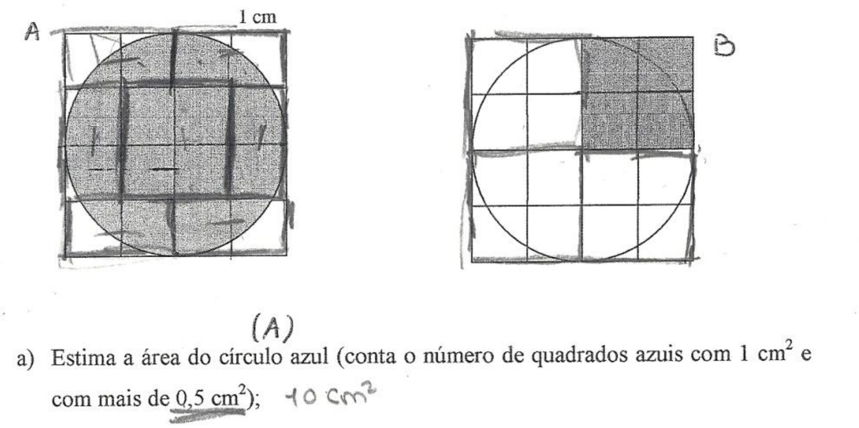
Tarefa 1 a). Alguns alunos demonstraram dificuldade em reconhecer os quadrados com mais de 0,5 cm^2 pintado e outros grupos consideraram as quadrículas dos cantos como inteiras ou metade, pelo que a área estimada pelos alunos foi diferente nos vários grupos, como se pode observar nas suas respostas, ao contrário do que eu esperava.



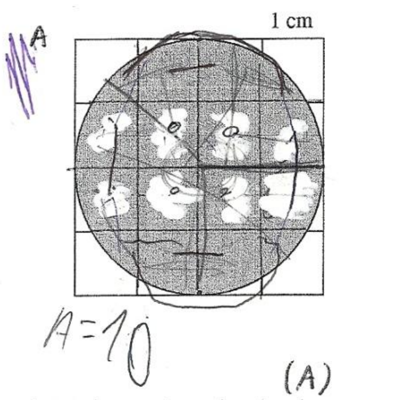
João, Gonçalo e Rui, FT6 – Tarefa 1 a)



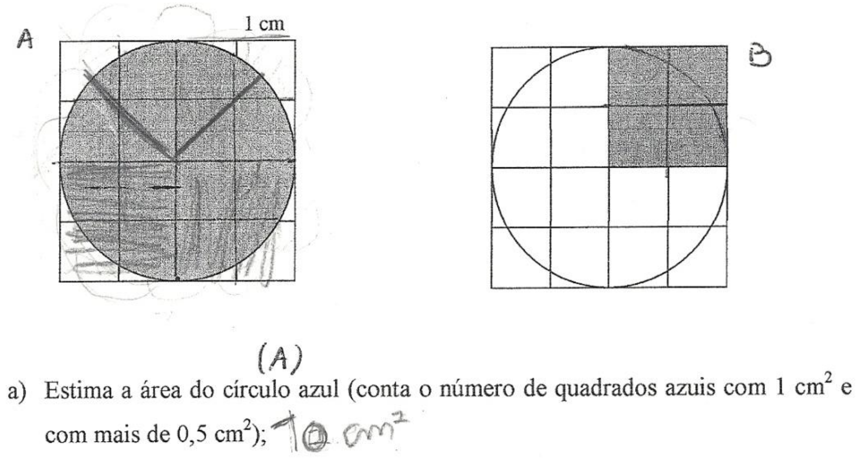
Mariana G, Diana e Diogo, FT6 – Tarefa 1 a)



Ricardo e Bárbara, FT6 – Tarefa 1 a)

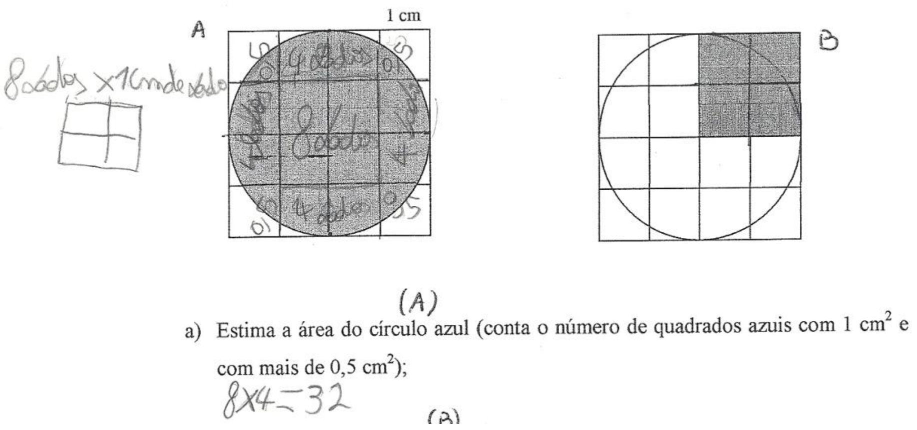


Ana Filipa e Margarida, FT6 – Tarefa 1 a)



Ana Lia e Daniel M., FT6 – Tarefa 1 a)

O grupo seguinte confundiu lados de quadrículas com quadrículas e apresentou a seguinte resposta:

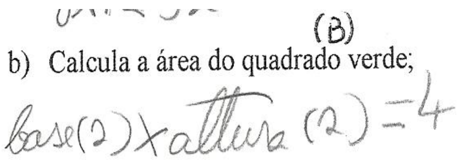


Catarina e Lara, FT6 – Tarefa 1 a)

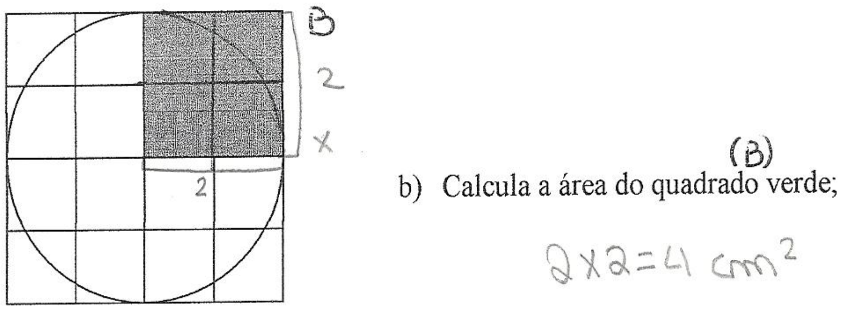
Dos doze grupos que se formaram apenas cinco apresentaram 12 cm^2 como resposta a esta tarefa, tendo contabilizado corretamente e apenas as quadrículas totalmente preenchidas ou com mais de metade da área preenchida, entre eles, o grupo de Mariana.

Na discussão desta tarefa alguns grupos foram explicar a sua resposta ao quadro, especificando como efetuaram a contagem das quadrículas e com a explicação dos grupos que deram a resposta correta, os outros grupos foram mudando de opinião. Catarina, ao referir a sua resposta indicou que estava errada, porque tinha indicado medidas à volta e não era o que se pretendia. O grupo de Ana Lia também concordou que a área 12 cm^2 era um valor mais preciso que 10 cm^2. Os restantes grupos, que tinham apresentado valores superiores, compreenderam que não podiam contabilizar as quadrículas com menos de metade da área preenchida.

Tarefa 1 b). Nesta alínea apenas era solicitado que os alunos calculassem a área de um quadrado. À exceção de dois grupos, que não apresentaram qualquer resposta, todos indicaram como valor para a área do quadrado, quatro. Apenas três destes grupos não indicaram qualquer unidade de medida e os restantes indicaram a unidade de medida correta. Os grupos de Catarina e de João calcularam a área do quadrado através da aplicação da fórmula, previamente estudada, enquanto os restantes grupos se limitaram a apresentar a resposta final, até porque a figura permitia a obtenção da área por mera visualização.



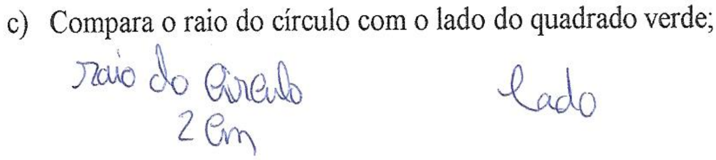
Catarina e Lara, FT6 – Tarefa 1 b)



João, Gonçalo e Rui, FT6 – Tarefa 1 b)

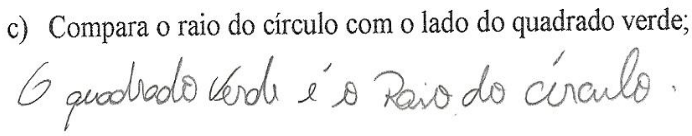
Durante a realização desta tarefa os alunos não demonstraram ter dificuldades e o facto de não terem apresentado uma resposta com unidades de medida um foi aspeto positivo a destacar, já que, em tarefas anteriores este erro foi frequente.

Tarefa 1 c). Nesta tarefa quatro grupos apresentaram uma resposta idêntica, correspondente àquela que era esperada, pois referiram que o raio do círculo era idêntico ao lado do quadrado. Outros dois grupos, acrescentaram o valor correspondente a essas medidas (2 cm). O grupo de João S. e Leandro não fez nenhuma comparação mas indicou a medida do raio do círculo.

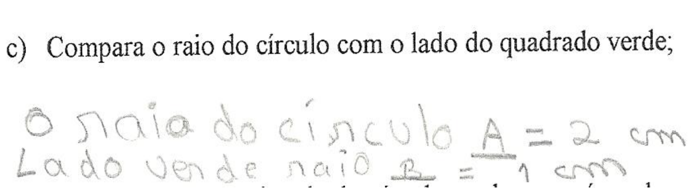


João S. e Leandro, FT6 – Tarefa 1 c)

Já o grupo de Catarina e Lara aparentava estar no caminho certo mas não soube expressar-se corretamente e o grupo de João, de um modo pouco explicito, pela confusão da linguagem, considerou que o lado do quadrado apenas media 1 cm.

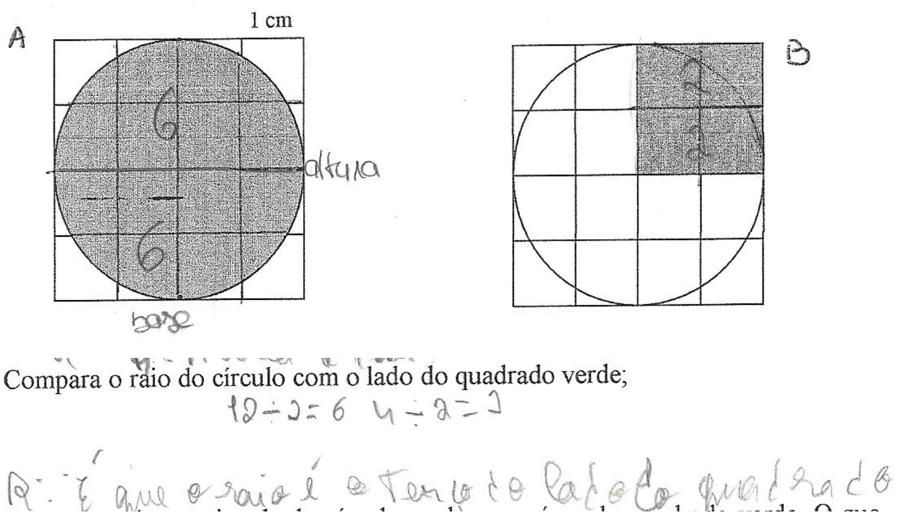


Catarina e Lara, FT6 – Tarefa 1 c)



João, Gonçalo e Rui, FT6 – Tarefa 1 c)

O grupo de Maria também não apresentou uma resposta correta apesar de poder ser uma resposta correta para a alínea seguinte (tarefa 1 d)) já que este grupo não apresentou nenhuma resposta nessa alínea.



Maria, André e Iris, FT6 – Tarefa 1 c)

Como alguns grupos não reponderam a esta questão e à seguinte, posso inferir que poderão não ter tido tempo para terminar a tarefa ou tiveram dificuldade em interpretar a questão, tendo em conta que necessitavam de identificar o raio do círculo A, o lado do quadrado B e comparar os dois valores. Nem todos os grupos conseguiram responder de uma forma clara e precisa.

Na discussão desta tarefa, que ocorreu na aula seguinte, perguntei a todos os grupos qual a sua conclusão e questionei o grupo de André, a fim de tentar perceber porque tinham considerado o lado do quadrado, um terço do raio do círculo. O grupo não conseguiu explicar-se pelo que fui perguntando o que tinham considerado como raio e lado do quadrado. Os alunos, como tinham confundido raio com diâmetro e não tinham percebido muito bem o que era pretendido na questão, foram respondendo, com o auxílio da turma, às questões colocadas e chegaram à conclusão pretendida.

Tarefa 1 d). Para resolver esta tarefa os alunos tinham de comparar a área do círculo com a área do quadrado, para que pudessem concluir que a área do quadrado era cerca de um terço da área do círculo e a partir daí chegarem à necessidade de usar o valor de π (aproximadamente 3) para calcular a área de um círculo, ou seja, multiplicarem por π, o quadrado do raio.

Dos doze grupos formados, sete tentaram responder mas apenas três chegaram à conclusão esperada, como se pode verificar nas suas respostas.

d) Compara a área estimada do círculo azul com a área do quadrado verde. O que observas?

observo que a área estimada do círculo azul é o triplo do quadrado verde.

Hugo e Lucas, FT6 – Tarefa 1 d)

d) Compara a área estimada do círculo azul com a área do quadrado verde. O que observas?

Observamos que o quadrado verde × 3 forma a área estimada do círculo azul.

Catarina e Lara, FT6 – Tarefa 1 d)

d) Compara a área estimada do círculo azul com a área do quadrado verde. O que observas?

círculo = 12 cm²
quadrado = 4 cm²
4 × 3 = 12 e 12 : 3 = 4.

Rodrigo e Rafael, FT6 – Tarefa 1 d)

O grupo de João, aluno estudo de caso, limitou-se a indicar o valor das duas áreas sem apresentar uma relação entre eles.

d) Compara a área estimada do círculo azul com a área do quadrado verde. O que observas?

círculo A = 12 cm²
quadrado B = 4 cm²

João, Gonçalo e Rui, FT6 – Tarefa 1 d)

O grupo de Ricardo também não comparou os valores mas o facto de ter contabilizado incorretamente a área do círculo prejudicou o seu desempenho nesta tarefa, impedindo os alunos de encontrar uma relação direta entre as duas áreas.

d) Compara a área estimada do círculo azul com a área do quadrado verde. O que observas?

O que observo é que o quadrado B Tem 4 cm² e O circulo A Tem 10 cm².

Ricardo e Bárbara, FT6 – Tarefa 1 d)

O grupo de Pedro manteve a sua posição inicial, de que uma área era um quarto da outra, sem se basear nos valores obtidos. Na discussão Pedro explicou que era um quarto porque se estava a referir unicamente à parte do quadrado que se encontrava no interior da circunferência.

d) Compara a área estimada do círculo azul com a área do quadrado verde. O que observas?

Que uma parte do quadrado é um quarto do circulo A

Mariana e Pedro, FT6 – Tarefa 1 d)

Finalmente, o grupo de Ana Lia apresentou uma conclusão baseada na visualização sem encontrar uma relação numérica entre as medidas das áreas. Na discussão da tarefa, Ana indicou que se usava o quadrado para descobrir a área do círculo

d) Compara a área estimada do círculo azul com a área do quadrado verde. O que observas?

Que o quadrado verde está dentro do círculo azul.

Ana Lia e Daniel M., FT6 – Tarefa 1 d)

A discussão da tarefa 1 d) foi iniciada com um grupo que tinha concluído que a área do círculo era o triplo ou três vezes a área do quadrado, conclusão que os outros grupos apoiaram e os fez perceber os seus erros, até porque já tinham determinado os valores corretos das áreas e facilmente perceberam a relação entre eles. Como nenhum grupo chegou a efetuar a tarefa 1 e), sugeri que o fizessem em casa para verificarem que esta relação se mantinha para qualquer círculo que tivesse o raio igual ao lado de um quadrado e dei continuidade à discussão para que pudessem compreender melhor esta relação e encontrarem uma forma de determinar a área de qualquer círculo. Também introduzi a ficha de trabalho 7. Assim:

Professora: Isto é um valor certo ou é um mais ou menos, um valor aproximado?

Alunos: Mais ou menos.

Professora: Nós tínhamos a área do círculo que era cerca de, certo? Era um, valor aproximado quando estávamos a contar os quadrados em número certo. Estávamos a contar um valor mais ou menos aproximado.

Rafael: É uma estimativa.

Professora: Era uma estimativa, exatamente Rafael. Então vocês conhecem algum número, por causa deste três deste círculo, há algum número perto do três que vocês conheçam…

Mariana: É o π.

Professora: … que está relacionado com o círculo.

Rafael: É o π.

Alguns alunos: É o π.

Professora: É o π. O que é que é o π?

Alunos: Três, vírgula catorze.

Professora: É mais ou menos três, vírgula catorze. Três, vírgula catorze está pertinho do três. Então significa que para a área do círculo nós vamos precisar de um quadrado e multiplicar por π, pelo três. Ora, que quadrado é q nós teríamos? (Silêncio por parte dos alunos). O quadrado que tem de lado, neste caso, dois centímetros. O que é que o lado do quadrado tem a ver com o círculo?

Pedro: É o raio.

Professora: Então vamos pensar que é o quadrado do raio e depois como é que chegamos à área? Precisamos do quadrado do raio, o quadrado do raio (e desenho um quadrado e escrevo raio em dois lados), raio vezes raio, raio ao quadrado, quadrado do raio e depois como é que calculo a área?

Pedro: Vezes o π.

Rafael: Vezes o π.

Ana Lia: É raio vezes raio vezes o π.

As intervenções de Mariana, Rafael, Pedro e Ana Lia foram essenciais para discutir a relação entre o quadrado e o círculo e chegar à conclusão pretendida, uma forma de obter a área de um círculo. Rafael consegui associar o triplo ao π e Pedro verificou que o lado do quadrado correspondia ao raio do círculo. Em jeito de conclusão Ana Lia deduziu a fórmula da área do círculo. Sistematizei esta discussão e fiz o registo no quadro, como se pode verificar na figura 18, que os alunos transcreveram para o caderno. Sugeri, então, a realização da ficha de trabalho 7, também relacionada com a área do círculo, onde iriam, provavelmente, chegar à mesma conclusão.

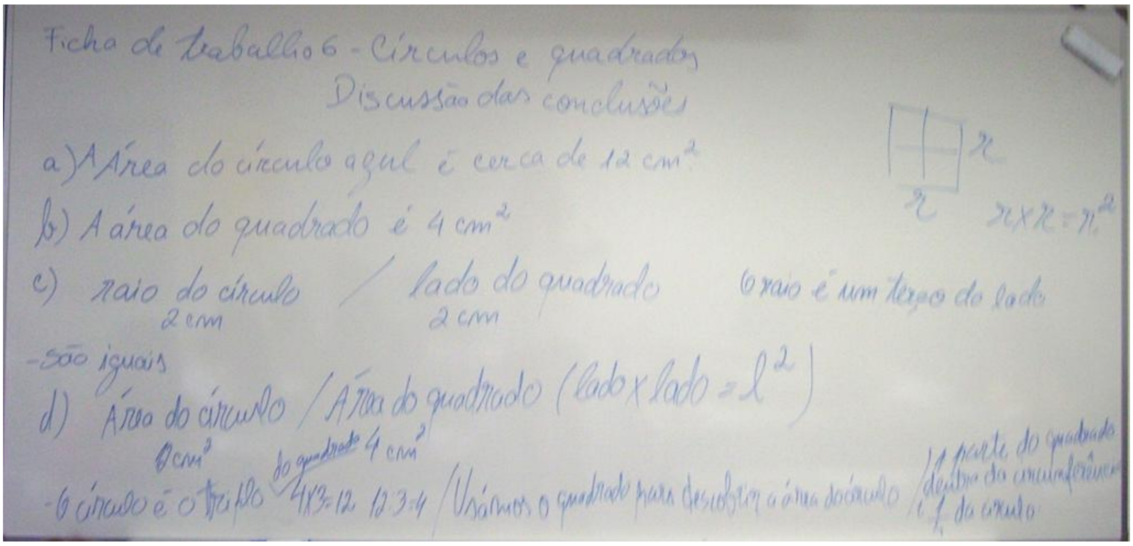


Figura 18. Registo escrito das conclusões da ficha de trabalho 6

Balanço. A tarefa introdutória desta ficha de trabalho revelou-se importante para rever a noção de área e incentivar os alunos a encontrarem uma forma de determinar a área de círculos enquadrados em retângulos preenchidos com quadrículas de 1 cm de lado. Os alunos perceberam que, dada a dificuldade da contagem de quadrículas em círculos de grandes dimensões poderia haver outro modo de calcular a área desta figura. Ao longo da realização da ficha e consequentemente, na discussão final, os alunos foram relacionando o círculo com um quadrado que tinha de lado a mesma medida do raio do círculo. Este trabalho de cariz experimental, onde os alunos podiam visualizar a relação entre as medidas e as figuras, favoreceu a discussão entre eles e enriqueceu a discussão final. Tomando como ponto de partida as conclusões obtidas pelos alunos, consegui levá-los a relacionar os valores encontrados com o π e o raio do círculo, necessários ao cálculo da área de um círculo através da sua fórmula.

Apesar das dificuldades demonstrados na contagem das quadrículas inteiras e com mais de metade da área colorida e na distinção de raio e diâmetro, os alunos conseguiram descobrir que a área do círculo era o triplo da área do quadrado e que esse valor era justificado pela presença da constante π. O objetivo proposto para esta ficha de trabalho foi atingido e permitiu explorar uma fórmula da área do círculo.

5.2.8. Ficha de trabalho 7

Com esta ficha de trabalho pretendia que os alunos determinassem e relacionassem a área do círculo com a área do retângulo, com o recurso a materiais concretos, como um círculo de cartolina dividido em setores. Deste modo, os alunos, em pequenos grupos (mesmos da ficha anterior), poderiam, para além de trabalhar a equivalência de figuras planas, relacionar a fórmula da área do retângulo com a do círculo e encontrarem, de modo análogo à ficha de trabalho anterior, a fórmula da área do círculo, de modo experimental, ao invés da mera memorização. Após o recorte e montagem dos setores do círculo de cartolina, os alunos só tinham a tarefa de comparar a figura obtida com o círculo e formular conjeturas relativamente à área das duas figuras. Para iniciar a atividade expliquei a tarefa aos alunos, especialmente o que queria dizer com "formular conjeturas", prevendo que não conseguissem perceber o que era pretendido e distribui o material pelos grupos (ficha de trabalho, círculo de cartolina previamente dividido e tesoura).

Os alunos, na sua maioria, revelaram-se entusiasmados com a tarefa e ajudaram-se mutuamente a fazer o recorte e a montagem mas as dificuldades surgiram no registo das conclusões. No grupo de Pedro e Mariana, enquanto Mariana recortava os setores do círculo, Pedro começou, precipitadamente a escrever conclusões. Sugeri que concluíssem a tarefa primeiro e observassem a figura final para poderem efetuar comparações e conjeturar. Apresento a resposta inicial do grupo.

Observa a figura obtida e compara-a com o círculo.

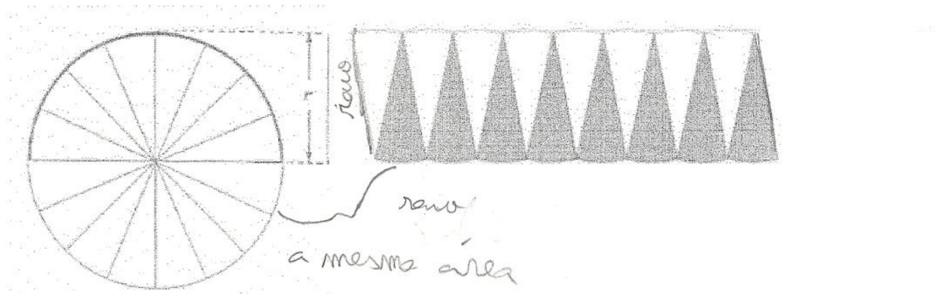
~~As fatias do s)~~ (os) do retângulo ~~são~~ metade do círculo.

Em relação às áreas das duas figuras obtidas, que conjeturas podes formular?

que para sabermos a área do círculo pode-mos dividir por 16 ~~depois~~ conta-se os centímetros que cada fatia contém

Pedro e Mariana, FT7

Seria difícil para os alunos encontrarem a fórmula pretendida apenas com a realização da tarefa mas seria expectável que o fizessem durante a discussão final e a partir das conclusões obtidas com a mesma. Com as ideias discutidas na ficha anterior e a minha ajuda, Catarina conseguiu apresentar uma justificação para a fórmula da área do círculo, como se pode observar na sua resposta. De qualquer modo, a sua necessidade de trabalhar com números e não com letras, ou seja, a sua dificuldade em trabalhar de modo algébrico, generalizando as suas ideias, impediram-na de explicar a passagem da metade da circunferência para a fórmula da área do círculo (raio × raio × π).



Observa a figura obtida e compara-a com o círculo.

Se juntar-mos dois em dois triângulos vai dar um retângulo o que nos vai ajudar na área.

Em relação às áreas das duas figuras obtidas, que conjeturas podes formular?

As figuras tem a mesma área, a altura do retângulo é o raio do círculo e a base é a metade da circunferência (16 : 2 = 8). Por isso para calcular a área é raio × raio × π.

Catarina e Lara, FT7

Inicialmente este grupo pensou na relação triângulo e retângulo, tendo em atenção a forma dos vários setores do círculo, e referiu que iria juntar a área dos vários retângulos, cada um formado por dois triângulos. Sugeri que simplificassem a sua ideia e pensassem no retângulo grande, que se formaria a partir do círculo, e na forma de obter a área desse retângulo. Catarina rapidamente explicou que se multiplicava a base pela altura, pelo que pedi que descobrisse qual era a base e qual era a altura, relacionando estas medidas com o círculo. Apresento a discussão que despoletou o registo da resposta correta:

Professora: O que é que este retângulo tem a ver com este círculo? Em relação às áreas, o que é que acontece às áreas? A área do círculo e a área deste retângulo?

Catarina: É igual.

Professora: É igual. Ou seja calcular a área do retângulo seria o mesmo que calcular a área?

Catarina: Do círculo.

Professora: Vamos lá montar para ver se é igual, se usamos a mesma quantidade de setores. Então se descobrirmos como é que se mede a área deste retângulo?

Catarina: Sabemos a do círculo?

Professora: Então como é que se calcula a área do retângulo?

Catarina: Então a área do retângulo é base vezes altura.

Professora: Qual é a altura? Consegues ver mais ou menos qual é a altura? A que é que equivale esta linha?

Catarina: Ah, o raio.

Professora: Então já sabes qual é a altura, o raio. Agora só te falta saber?

Catarina: A base. E quanto é que é o raio professora?

Professora: Não interessa. Vamos chegar a uma fórmula, não é? Sabemos que vamos utilizar o raio, multiplicar pelo raio.

Catarina reconheceu a equivalência das duas figuras (retângulo e círculo) e identificou a altura do retângulo, relacionando-a com o círculo mas é notória a sua necessidade de trabalhar com números. Entretanto Ana Lia pediu a minha ajuda após a montagem da figura. Facilmente me indicou que as figuras tinham a mesma área e eram, por isso, equivalentes. Tentei, deste modo, incentivá-la a ir mais longe para descobrir a área do retângulo partindo do círculo.

Professora: Equivalentes. Vamos escrever essas coisas todas e vamos o que é que podemos comparar em relação às áreas e agora, sabemos calcular a área do retângulo, não sabemos?

Ana Lia: Sabemos.

Professora: Então se são iguais, como é que nós calculando a área do retângulo calculávamos a área do círculo. Tentem descobrir como é que se calcula a área desse retângulo.

Ana Lia: Podemos fazer como fazemos o círculo.

Professora: Como é que se calcula a área do retângulo?

Ana Lia: Contando os quadradinhos ou fazendo lado vezes altura.

Professora: Sabes qual é a altura?

Ana Lia: Não.

Professora: Qual é a altura, olhando para o círculo e para os queijinhos que andámos a fazer? Que linha é esta?

Ana Lia: Deve ser mais ou menos três, vírgula catorze, que é o π.

Professora: Não. Não é preciso dares-me um valor, mas a que corresponde esta linha (apontando para uma das linhas de um setor, correspondentes ao raio do círculo)? Quando a gente monta o círculo, que linha é esta?

Ana Lia: É a altura.

Professora: Um círculo tem altura? Olha para lá. Para onde está a apontar?

Ana Lia: É a metade.

Professora: Se montares o círculo, que linhas são estas do círculo?

Ana Lia: Dividem o círculo.

Professora: Dividem o círculo em partes mas que nome se dá a essa linha?

Ana Lia: Ah é o raio.

Professora: Então já temos a altura do retângulo.

Ana Lia: É o raio.

Deixei o grupo a refletir sobre o assunto para que pudessem registar as suas conclusões. Tal como Catarina, Ana Lia conseguiu perceber que a altura da figura formada correspondia ao raio do círculo e bastaria descobrir a que correspondia a base para encontrar a área do círculo. Considerando que não explicaram como obtiveram a base posso concluir que a fórmula que registaram foi obtida a partir da ficha de trabalho anterior e da discussão que se sucedeu na turma.

Em relação às áreas das duas figuras obtidas, que conjeturas podes formular?

São as duas figura equivalentes.
Tem a mesma área = raio $\times$ raio $\times$ π (pi) = área
A área é a mesma porque os Triângulos são os mesmos a figura é que é diferente.

Ana Lia e Daniel M., FT7

Com o grupo de Rodrigo e Rafael a discussão foi muito semelhante mas como comecei a falar em voz alta, a discussão foi alargada à turma, tornando-se bastante produtiva, o que permitiu ajudar alguns grupos em simultâneo, como o de Catarina e de Ana Lia:

Professora: Quero que tentem descobrir como é que se calcula a área desse retângulo.

Rodrigo: Base vezes altura.

Professora: Pronto, então agora descubram o que é que é a altura e o que é que é a base.

Ana Lia: A altura corresponde ao raio.

Professora: A base vai corresponder ao quê? Do círculo? O que é que a base corresponde no círculo?

Ana Lia: É a circunferência.

Professora: É a circunferência toda?

Mariana: Não.

Rodrigo: É metade.

Professora: É metade do quê?

Rodrigo: Do círculo.

Professora: Do círculo, da?

Catarina: Circunferência.

Professora: E o que é que corresponde a circunferência?

Ana Lia: À volta.

Professora: E o que é à volta?

Alguns alunos: O perímetro.

Professora: Então é o perímetro da circunferência toda, a base?

Alguns alunos: Não.

Rodrigo: É metade.

Professora: Metade do perímetro. Como é que se calcula o perímetro?

Rafael: Diâmetro vezes o π.

Professora: Então como é que se calcula metade do perímetro?

Rodrigo e Rafael: Raio vezes π.

Esta discussão mostra que estes alunos compreenderam a noção de perímetro e ainda se lembravam da fórmula do perímetro do círculo. Rodrigo e Rafael foram mais longe e, em vez de pensarem no perímetro do semicírculo como metade do círculo, recordaram a discussão ocorrida no final da ficha de trabalho 5, onde se concluiu que o perímetro do semicírculo podia ser facilmente obtido multiplicando o raio por π.

Concluí a discussão frisando as medidas da base e da altura do retângulo encontrado, levando os alunos à fórmula pretendida e continuei a auxiliar os grupos. É provável que as respostas do grupo de Rodrigo e de Mariana também tenham surgido a partir desta discussão.

As áreas é equivalente.
A área calcula-se $r \times r \times 3,14$ = é a área do círculo mas é para calcular metade [illegible] é $r \times 3,14$

Rodrigo e Rafael, FT7

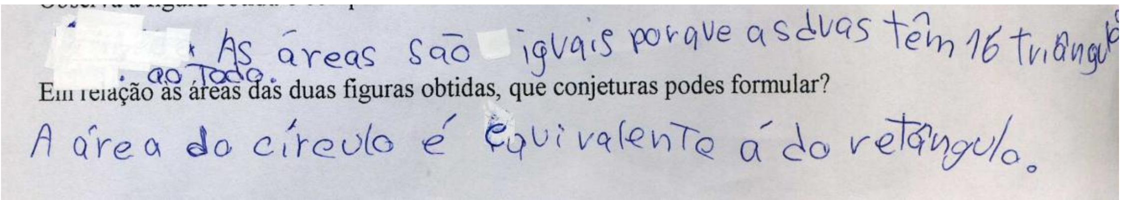
~~por~~ [illegible]) construímos um retângulo com 16 e fizemos lados × lados ou fizemos $r \times r = r^2 \times \pi$

Mariana e Pedro, FT7

Quanto ao trabalho desenvolvido pelos outros grupos, a maioria referiu que as áreas eram iguais mas não tentaram ou não tiveram tempo para encontrar um modo de calcular a área como se pode verificar nas seguintes respostas:

Em relação às áreas das duas figuras obtidas, que conjeturas podes formular?
As áreas são iguais. e são equivalentes

Maria, Iris e André, FT7

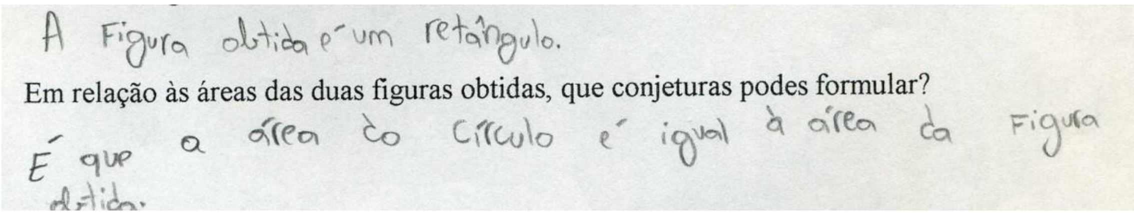


As áreas são iguais porque as duas têm 16 triângulos ao Todo

Em relação às áreas das duas figuras obtidas, que conjeturas podes formular?

A área do círculo é equivalente á do retângulo.

Margarida e Ana Filipa, FT7

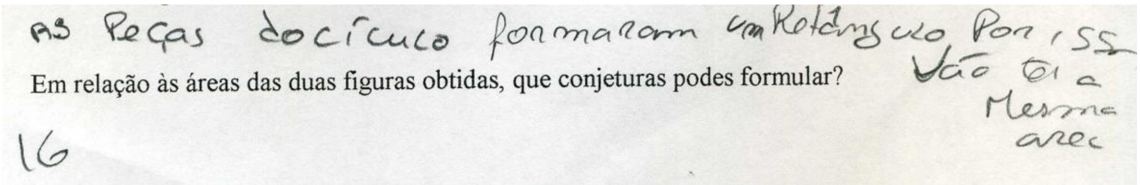


A Figura obtida é um retângulo.

Em relação às áreas das duas figuras obtidas, que conjeturas podes formular?

É que a área do círculo é igual à área da Figura obtida.

Lucas e Hugo, FT7

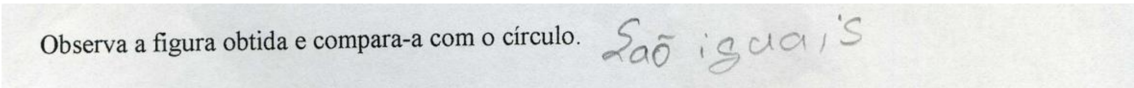


as Peças do círcuco formaram um Retângulo Por isso vão ter a mesma area

Em relação às áreas das duas figuras obtidas, que conjeturas podes formular?

16

Mariana G., Diana e Diogo, FT7



Observa a figura obtida e compara-a com o círculo. São iguais

Rui e Miguel, FT7

Antes da discussão final recolhi todo o material para que os alunos não dispersassem a sua atenção. Uma vez que todos os grupos conseguiram montar a nova figura e perceberam que se assemelhava a um retângulo, iniciei a discussão perguntando o que tinham em comum as duas figuras:

Professora: Comparando o retângulo com o círculo a que conclusões é que chegaram?

Rodrigo: As áreas são equivalentes.

Professora: As áreas são equivalentes ou são iguais?

Rodrigo: Iguais.

Ana Lia: Nós dissemos que as duas figuras eram equivalentes.

As discussões em pequeno grupo foram importantes para iniciar a discussão final, onde os alunos deram o seu contributo reconhecendo a equivalência das duas figuras, essencial para a conclusão pretendida, área do círculo. Como mais nenhum grupo se manifestou registei esta conclusão no quadro (o retângulo formado e o círculo são equivalentes porque têm a mesma área). Nesta fase julgo que a maioria dos alunos compreendeu a noção de equivalência de figuras planas. Aproveitei este momento para relembrar a congruência de figuras, perguntando se o retângulo obtido e o círculo eram congruentes, ao que me responderam que não e Pedro justificou esta resposta referindo que as figuras não tinham a mesma forma. Dando continuidade à discussão, Ana Lia e Rodrigo indicaram a fórmula que escreveram nas suas respostas mas não conseguiram explicar como a tinham descoberto. Nessa altura Catarina entra na discussão:

Catarina: A altura do retângulo é o raio do círculo.

Professora: A altura do retângulo é o raio do círculo. Esta parte é a mais importante (fazendo o registo desta conclusão no quadro).

Catarina: E a base é metade da circunferência.

Professora: E a base é metade da circunferência. Esta parte é que revela compreensão, do porque é que isto é assim. Perceberam porque é que isto é assim?

Mariana: Então é o raio vezes o raio vezes o π.

Professora: Eu podia chegar aqui e dizer: a área do círculo calcula-se assim e vocês decoravam ou não decoravam.

Mariana: É fácil, é raio vezes o raio vezes π.

Tal como previsto e de acordo com a discussão realizada durante a execução da tarefa, Catarina e Mariana demonstraram ter concluído a tarefa com êxito, encontrando uma fórmula para calcular a área do círculo. Entretanto questionei os outros grupos quanto às suas conclusões mas nenhum se manifestou e referiram-se apenas ao facto das figuras serem equivalentes, pelo que intervim, a fim de sistematizar as conclusões obtidas e explicar melhor aos restantes alunos este modo de determinar a área de um círculo. Desenhei as figuras no quadro e fui questionando os alunos incentivando a sua participação e fazendo com que refletissem acerca das conclusões obtidas pelas colegas. Os alunos mostraram-se pouco participativos mas com a minha insistência e a visualização das figuras no quadro e em cartolina acabaram por fazer algumas intervenções importantes para compreenderem a conclusão final, nomeadamente o facto da base do retângulo obtido corresponder ao semicírculo e, portanto, se calcular multiplicando o raio por π, já que o raio é metade do diâmetro e um semicírculo é metade do círculo.

Balanço. Os alunos entusiasmaram-se com a tarefa, uma vez que envolvia o recorte e montagem de figuras e todos os grupos conseguiram transformar o círculo numa figura semelhante a um retângulo, sendo que quase todos referiram que o retângulo obtido tinha a mesma área do círculo ou era igual. As dificuldades surgiram quando tentei levar os alunos mais além, para que obtivessem a fórmula da área do círculo, já obtida na ficha de trabalho anterior. O entusiasmo e participação de alguns grupos durante a realização da tarefa foi muito gratificante e deu origem a uma discussão em pequeno grupo muito interessante, levando os alunos a atingir os objetivos propostos, ainda antes da discussão final. Os assuntos abordados nas fichas anteriores foram revistos nesta altura e revelaram-se cruciais para enriquecer esta nova aprendizagem.

Ao longo desta ficha de trabalho percebi que os alunos já conseguiram distinguir perímetro de área e a fórmula da área do retângulo revelou ser um facto adquirido, o que facilitou a dedução da fórmula da área do círculo. Apesar de alguns grupos estarem pouco participativos, revelarem alguma dificuldade em visualizar que a altura do retângulo formado correspondia ao raio do círculo e não conseguirem indicar como se calculava o perímetro do círculo, a discussão final e a intervenção de alguns alunos foi benéfica para todos, ajudando-os a minimizar estas dificuldades. A ajuda entre os pares e a partilha de conclusões numa tarefa envolvendo materiais concretos permitiu que fossem os alunos a encontrar uma forma de calcular a área do círculo, tornando a atividade matemática que realizaram mais significativa para eles.

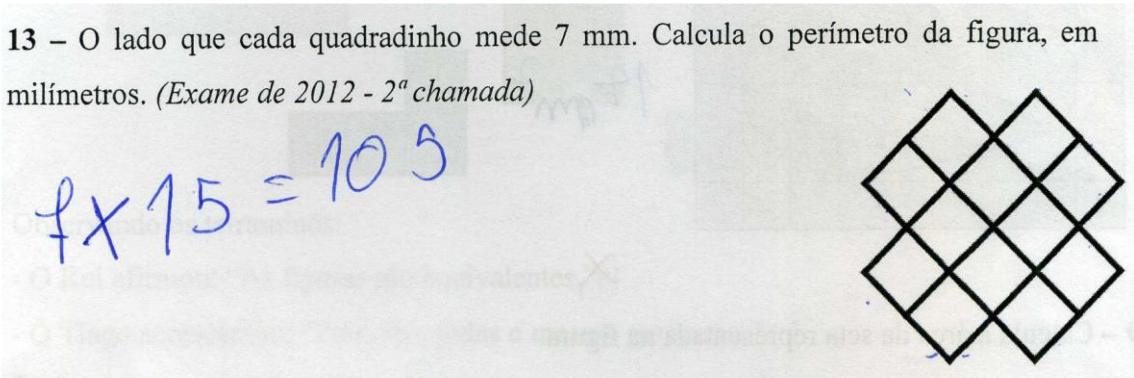
5.3. Desempenho dos alunos nos testes

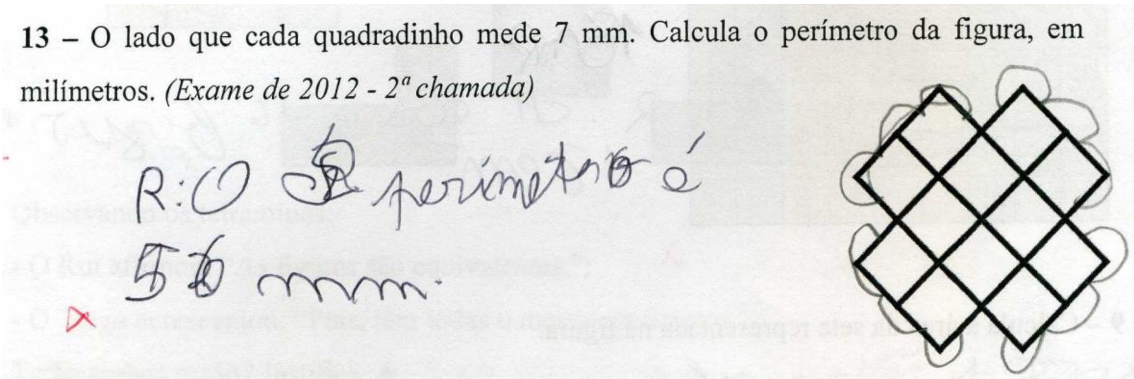
Neste ponto apresento uma análise comparativa dos resultados (Anexo 20) apresentados pelos alunos no teste diagnóstico (Anexo 12) e no teste final (Anexo 17), respeitante ao cálculo da medida do perímetro, ao cálculo da medida da área, à resolução de problemas envolvendo o perímetro, à resolução de problemas envolvendo áreas, distinção entre perímetro e área e uma análise das questões relativas à equivalência e congruência de figuras.

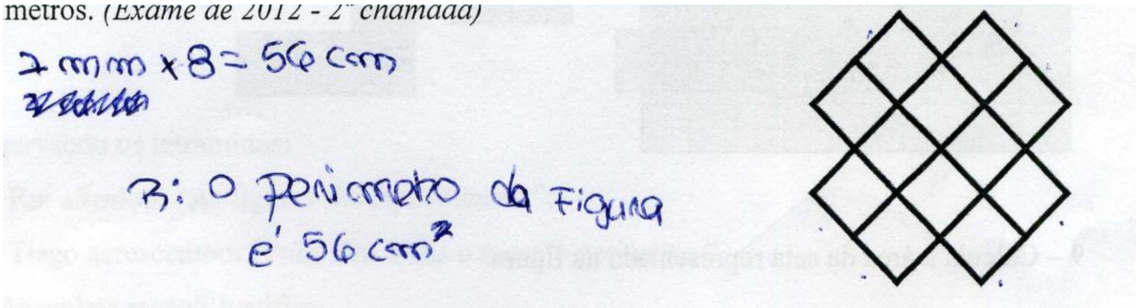
5.3.1. Cálculo do perímetro

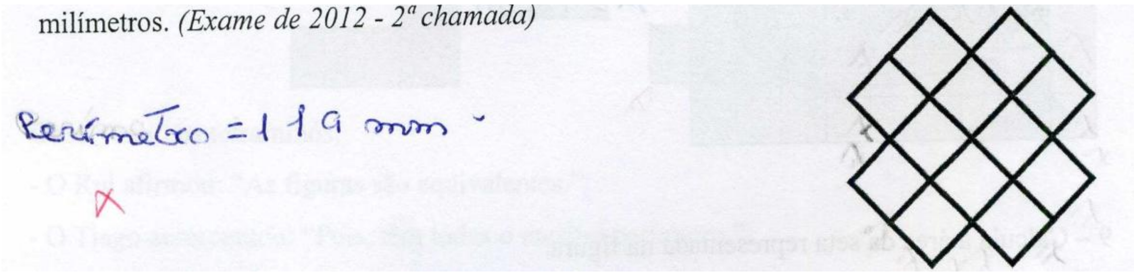
Nas tarefas do cálculo do perímetro é pedido aos alunos que determinem o perímetro de figuras sendo dadas as medidas dos seus lados. Na questão 1 a) (teste diagnóstico) e 1 (teste final), em que as figuras não têm indicação do comprimento de todos os lados, houve uma melhoria no desempenho dos alunos. Mesmo os alunos que não tiveram sucesso no teste final, ao contrário do teste diagnóstico, onde não há tentativa de resposta ou é indicado apenas um número, a quase totalidade dos alunos responderam à questão somando os lados da figura, apesar de fazerem apenas a soma dos valores visíveis ou de se enganarem no comprimento dos lados que estavam em falta. Na questão 1 c) (teste diagnóstico) essa dificuldade não foi tão notada, já que a figura era mais simples e era apresentado o comprimento de todos os lados. Poderia ter apresentado uma figura semelhante no teste final, onde, provavelmente, a evolução seria mais significativa.

Na questão 1 b) (teste disgnóstico) e 13 (teste final) apenas é indicada a medida do lado de cada quadrícula e também é possível verificar o aumento do sucesso. Os erros ocorridos, especialmente no teste final, prendem-se com o engano da contagem de linhas à volta da figura como se pode verificar nas seguintes respostas:







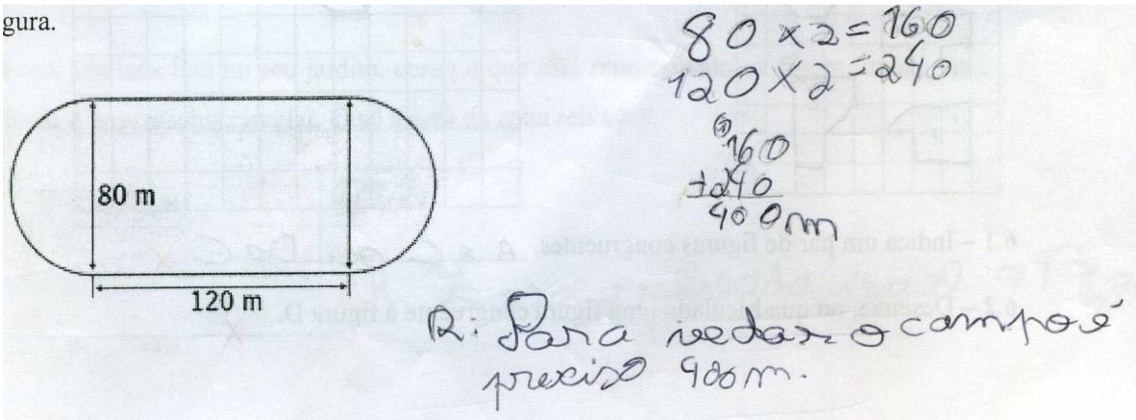


A percentagem de sucesso da questão 2 (teste diagnóstico), é baixa mas já no teste final, onde era solicitado aos alunos que determinassem o comprimento dos lados em falta, a percentagem de sucesso aumenta para o dobro. O facto de os alunos poderem visualizar a figura, no teste final, pode também ser um fator explicativo para este aumento, apesar de a questão requerer um raciocínio mais elaborado.

No que diz respeito à compreensão do conceito de perímetro, foi visível uma melhoria significativa, tendo os alunos a preocupação de responder às questões do teste final, considerando a linha à volta da figura e somando os comprimentos dos lados ou das medidas apresentadas como forma de determinar o perímetro.

5.3.2. Resolução de problemas envolvendo o perímetro

A questão 3, quer do teste diagnóstico, quer do teste final, tinha dois objetivos: (i) verificar se os alunos reconheciam a necessidade de determinar o perímetro da figura e (ii) verificar se conseguiam, efetivamente, encontrar esse valor. O sucesso baixou do teste diagnóstico para o teste final mas essa diminuição em muito se deve ao facto dos alunos não terem conseguido calcular o perímetro dos dois semicírculos da figura do teste final. Enquanto que no teste diagnóstico a figura era um simples retângulo, no teste final, era apresentada uma figura composta por um retângulo entre dois semicírculos. Em várias respostas erradas do teste final, os alunos calcularam o perímetro do retângulo, como se pode verificar na resposta seguinte:



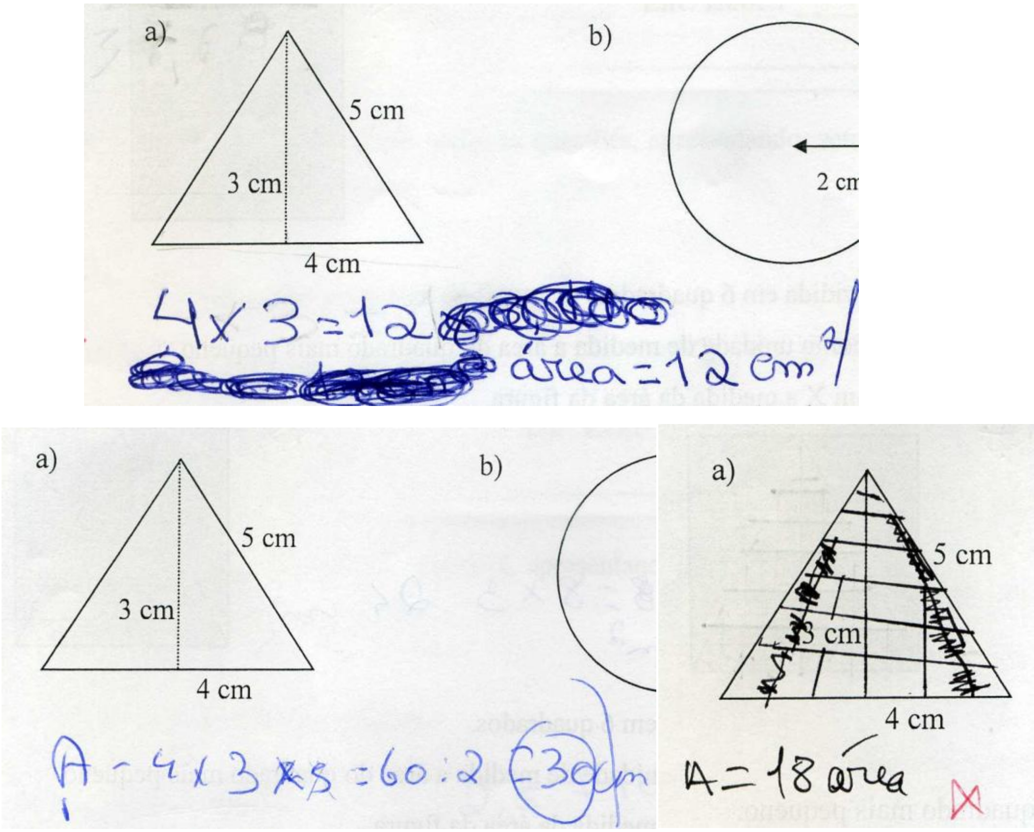
Na maioria dos casos, no teste final, os alunos reconheceram que tinham de determinar o perímetro mas em vez da figura composta, determinaram o perímetro do retângulo no interior desta.

No que diz respeito à compreensão do conceito de perímetro, no teste diagnóstico (questão 6), era solicitado aos alunos que desenhassem uma figura com 24 unidades de perímetro. Apenas 19% dos alunos conseguiu fazê-lo com êxito. No teste final, na questão 4.1, que pedia aos alunos para desenharem uma figura equivalente à dada mas com maior perímetro, apenas 11 % dos alunos teve sucesso mas esta questão era muito mais complexa. Para responderem corretamente era necessário que soubessem o que eram figuras equivalentes e que conseguissem determinar o perímetro e a área da figura dada, embora ambos os testes requeressem a construção de uma figura com determinado perímetro. Se considerar a percentagem de alunos que apresentou uma construção com maior perímetro, independentemente de ser equivalente ou não, passa a haver cerca de 63% de sucesso. O desempenho dos alunos no teste final revelou, deste modo, que houve melhorias na compreensão do significado do conceito de perímetro.

5.3.3. Cálculo da área

O cálculo da área de figuras simples no teste diagnóstico (questões 4 a) e 4 b)), apesar das figuras estarem preenchidas com quadrículas, atingiu apenas uma percentagem de sucesso entre os 20% e os 30%. Esta percentagem foi baixa e, pelas respostas dos alunos é bastante visível a confusão entre perímetro e área, já que 48% dos alunos apresentaram a resposta numérica 8 na questão 4 a), que corresponderia à medida do perímetro, independentemente da unidade de medida utilizada, e 33% apresentou como resposta à questão 4 b) o valor 6, associado também a uma medida aproximada do perímetro, tendo os alunos considerado que as diagonais das quadrículas tinham a mesma medida dos lados. Já no teste final, a questão 8 apresenta uma taxa de sucesso de 56%, onde é possível verificar, mesmo nas respostas dos alunos que não fazem a estimativa correta, que há a preocupação de contar as quadrículas do interior da figura.

No que diz respeito ao cálculo da área de figuras dadas algumas medidas, no teste diagnóstico (questão 5), apenas 15% dos alunos tiveram sucesso, sendo que 44% calculou o perímetro do retângulo, apresentando, inclusivamente, a unidade de medida em metros. No teste final a percentagem de sucesso aumenta. Na questão 7 a) não foi tão notória a tentativa do cálculo do perímetro mas foram cometidos erros como multiplicar apenas a base pela altura do triângulo, multiplicar as três medidas indicadas na figura e tentar preencher o triângulo com quadrículas como se pode verificar nas seguintes respostas:



Na questão 7 b), o facto de a figura ser um círculo poderá ter aumentado o grau de dificuldade para os alunos, embora tenha havido mais sucesso do que na questão 7 a). Na questão 7 b), 22% dos alunos não apresenta qualquer tentativa de resposta e 15% calcula o produto de π pelo raio. É de salientar que nesta questão o perímetro da figura era igual à área, pelo que não é possível ter a certeza de que estavam, efetivamente, a calcular a área da figura, uma vez que a maioria dos alunos não indicou a fórmula da área do círculo ou não indicou qualquer unidade de medida ou apresentou a resposta em centímetros, o que dificulta a interpretação deste resultado.

Nas questões 9 e 10 (teste final) o sucesso volta a decrescer para 11% e 7,5%, respetivamente. O cálculo da área de figuras compostas contendo um triângulo ou um círculo aumentou bastante o grau de dificuldade das questões. Tendo em conta que na questão 7 o sucesso também foi baixo, já era expetável que nestas questões também o fosse. Alguns alunos calcularam a área do retângulo da figura mas não conseguiram calcular a do triângulo ou do círculo. Nas respostas erradas da questão 9, o erro de somar algumas das medidas da figura ainda surgiu. Na questão 10, 15% dos alunos calculou a área do retângulo mas retirou o perímetro do círculo, em vez da sua área, 11% calculou apenas a área do retângulo (com ou sem erros de cálculo) e 18,5% calculou o perímetro do retângulo (com ou sem erros de cálculo), apresentando o resultado em metros. Os resultados esperados para o cálculo da área de figuras compostas ficaram, deste modo, aquém das expetativas, tendo em conta o trabalho realizado ao longo das fichas de trabalho, mas houve melhorias no cálculo da área de figuras simples, embora alguns alunos ainda confundam área e perímetro.

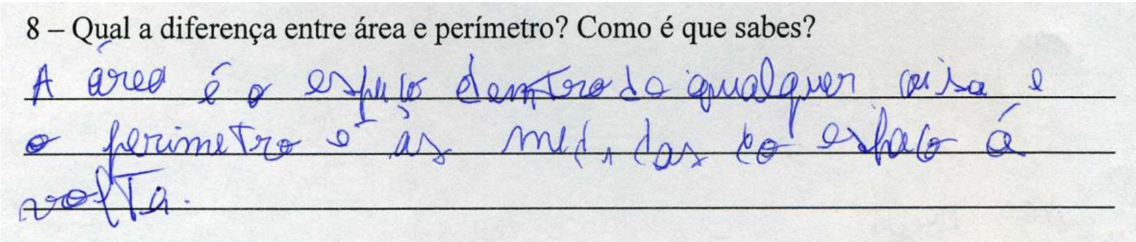
5.3.4. Resolução de problemas envolvendo a área

No que diz respeito à resolução de problemas onde é necessária a compreensão do conceito de área os alunos mantiverem o desempenho, que revelou ser melhor quando as questões envolviam o preenchimento de figuras com unidades quadradas e não o comprimento dos lados. Foi possível verificar, especialmente nas questões 7 do teste diagnóstico e 8 e 12 do teste final, que os alunos compreendem melhor o conceito de área, apercebendo-se da forma como a figura é preenchida, do que memorizando uma fórmula ou calculando a área de figuras a partir do comprimento dos lados ou da medida do raio (no caso do círculo). Já na questão 14 do teste final, os resultados não foram tão positivos mas eram dadas as medidas do comprimento e largura do retângulo a preencher e o comprimento do lado da unidade quadrada a utilizar, o que pode ter confundido os alunos. Apenas 22% dos alunos teve sucesso mas outros 37% preencheram a figura com quadrados embora tenham errado o número de filas (7×6, 8×5 ou 9×6) ou desistido dessa estratégia de resolução.

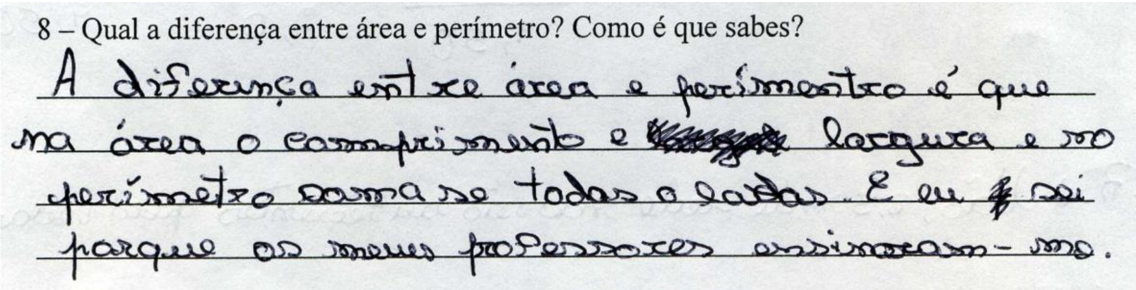
Na questão 11 do teste final, onde os alunos podiam relacionar a área do quadrado com a área do triângulo com a mesma base e altura, apenas 22% obteve sucesso. Nenhum destes alunos tentou determinar o lado do quadrado para depois, através da fórmula, calcular a área do triângulo, o que vem corroborar a ideia de que os alunos mais facilmente relacionam a área das figuras do que memorizam a fórmula da área do triângulo. É de salientar que 44% dos alunos não apresentaram qualquer tentativa de resposta, pelo que não é possível analisar o trabalho desenvolvida nesta questão. Quanto aos restantes alunos, as respostas são desprovidas de sentido, correspondendo a um valor único ou à soma ou produto de números.

5.3.5. Distinção entre perímetro e área

Quando questionados diretamente no teste diagnóstico (questão 8) da diferença entre perímetro e área, 30% dos alunos responderam que a área é o que está dentro e perímetro é o que está por fora ou à volta, 22% não respondeu e os restantes apresentaram algumas ideias erradas referindo-se às medidas dos lados ou falando em cubos, indiciando que este assunto tinha sido abordado no 1.º ciclo e que os alunos tinham algumas ideias corretas mas não se conseguiram expressar da melhor maneira. A avaliar pela melhoria dos resultados ao longo do teste final, algumas destas ideias foram clarificadas e melhoradas. Apresento algumas das ideias dos alunos no teste diagnóstico:


8 – Qual a diferença entre área e perímetro? Como é que sabes?

A area é o espaço dentro do qualquer coisa e o perimetro é às medidas do espaço á volta.


8 – Qual a diferença entre área e perímetro? Como é que sabes?

A diferença entre área e perímetro é que na área o comprimento e ~~largura~~ largura e no perímetro soma-se todos os lados. E eu sei porque os meus professores ensinaram-me.

8 – Qual a diferença entre área e perímetro? Como é que sabes?

O perímetro são unidades, área é quanto mede por dentro, ainda me lembro da primária.

8 – Qual a diferença entre área e perímetro? Como é que sabes?

O perímetro é os cm e a área é os cubos (Ex:) Seio indo à escola.

8 – Qual a diferença entre área e perímetro? Como é que sabes?

A diferença entre a área e o perímetro é que a área é o espaço de um objecto e o perímetro é a larguras de um objecto.

8 – Qual a diferença entre área e perímetro? Como é que sabes?

A área e o espaço de dentro do cubo e o perímetro é a medida de ~~[illegible]~~ cada Lado.

8 – Qual a diferença entre área e perímetro? Como é que sabes?

A área pode-se contar os quadrados o perímetro tem de se calcular

8 – Qual a diferença entre área e perímetro? Como é que sabes?

Porque a área é a largura e o perímetro é o comprimentos. Sei porque acho que é assim.

8 – Qual a diferença entre área e perímetro? Como é que sabes?

área é o espaço que a figura tem, e o perímetro é quanto 30 m ou 10 cm.

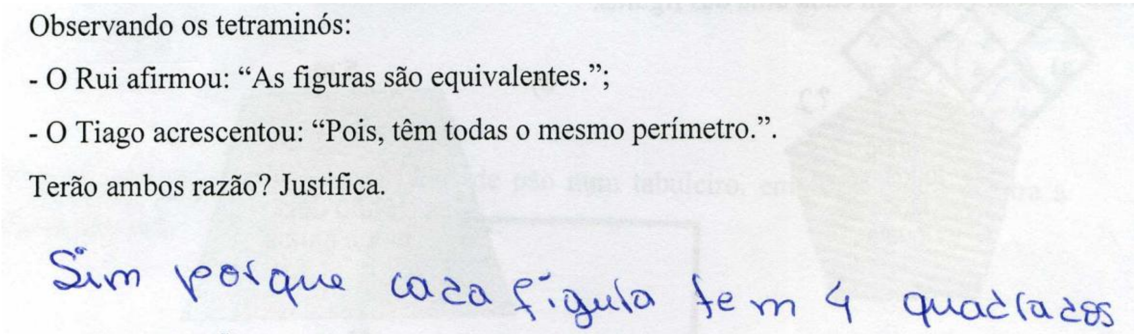
8 – Qual a diferença entre área e perímetro? Como é que sabes?

O perímetro é que se um risco de Baixo ou de cima têm de ter a mesma medida e os do lado outra medida mas se for um retângulo, se for um quadrado têm todos os lados a mesma medida

Fim

5.3.6. Equivalência e congruência de figuras

No que diz respeito à compreensão da noção de equivalência de figuras planas o sucesso aumentou bastante. Enquanto no teste diagnóstico apenas 11% dos alunos julgavam que figuras com a mesma área podiam ter perímetros diferentes, no teste final 44% dos alunos reconheceram figuras equivalentes por terem a mesma área, verificando que podiam não ter o mesmo perímetro. No teste final, mais 22% dos alunos reconheceram que as figuras, apesar de diferentes, tinham a mesma área pois eram constituídas por quatro quadrados idênticos, como se pode verificar, a título de exemplo, na resposta seguinte:


Observando os tetraminós:

- O Rui afirmou: "As figuras são equivalentes.";

- O Tiago acrescentou: "Pois, têm todas o mesmo perímetro.".

Terão ambos razão? Justifica.

Sim porque cada figula tem 4 quadrados

Quanto à congruência de figuras planas, os alunos tiveram quase o dobro do sucesso a desenhar figuras congruentes, relativamente a identificar um par de figuras congruentes num conjunto de figuras. Na questão 6.1 (teste final), 15% dos alunos indicaram mais do que um par de letras para identificar as figuras e 33% indicaram como par de figuras congruentes as figuras D e E ou A e D, que eram equivalentes mas não congruentes, o que leva a concluir que estes alunos ainda podem confundir o conceito de equivalência com congruência. Na questão 6.2 (teste final) o sucesso é superior mas também se verifica a confusão com figuras equivalentes porque 22% dos alunos desenharam uma figura equivalente mas não congruente à figura D, metade dos quais, congruente às figuras A ou E. O sucesso nestas questões ficou aquém do esperado mas, tendo em conta o panorama geral dos testes, onde nenhuma questão ultrapassou os 60% de sucesso, este assunto teve bom desempenho por parte dos alunos.

5.3.7. Síntese

De um modo geral, verifica-se que o desempenho dos alunos melhora, quer no que diz respeito ao cálculo de perímetros, quer no que diz respeito ao cálculo de áreas. Antes da unidade de ensino as questões que registam melhor desempenho por parte dos alunos são as do cálculo do perímetro do triângulo e retângulo, com indicação do comprimento dos lados e a compreensão do conceito de área, quando implica o preenchimento da figura com unidades quadradas. Os alunos revelam algum entendimento da noção de perímetro e de área, mas no que diz respeito ao seu cálculo o desempenho revelou ser muito mais fraco. Há bastante evidência da confusão entre medida de perímetro e medida de área, já que nas questões que solicitam a determinação da área de figuras simples, vários alunos determinam o perímetro. Este erro dos alunos também é reportado na revisão de literatura. Depois da unidade de ensino não é tão comum e os resultados melhoram, mesmo no cálculo da área de figuras mais complexas como sendo o triângulo e o círculo. Os alunos revelaram melhor desempenho e evolução no que diz respeito à equivalência de figuras planas, identificando a área e o perímetro com mais facilidade mas revelaram pior desempenho na resolução de problemas que envolviam o cálculo da área, especialmente quando necessitavam de decompor as figuras.

5.4. Balanço global das aprendizagens dos alunos

A unidade de ensino preparada pressupõe a valorização dos conhecimentos prévios dos alunos, intuitivos e informais para que poderem servir de ponto de partida para a construção de novos conhecimentos de modo a chegar às regras formais da Matemática. Trabalhando simultaneamente os conceitos de área e perímetro em atividades de caráter prático e investigativo, com recurso a diversos materiais, incluindo o software de geometria dinâmico Geogebra, pretende-se ajudar os alunos a construírem uma compreensão de área e perímetro, bem como as respetivas unidades de medida, a fim de desenvolver a capacidade de utilizar estes conhecimentos e capacidades na resolução de problemas em contextos diversos. Eram objetivos fazer com que os alunos pudessem: (i) compreender propriedades das figuras geométricas no plano; (ii) desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capazes de os usar e (iii) ser capazes de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em situações que envolvam contextos geométricos.

Durante as 28 aulas da unidade de ensino, os alunos trabalharam em pequenos grupos, pares ou trios, mas também individualmente e em grande grupo. As fichas de trabalho englobaram vários assuntos relacionados com o tema áreas e perímetros, onde estes dois conceitos foram trabalhados em simultâneo e separadamente, nomeadamente no que diz respeito à área do triângulo e perímetro e área do círculo. De um modo geral os alunos mostraram-se entusiasmados, empenhados e participativos, embora nas discussões finais fossem quase sempre os mesmos alunos a participar. Alguns alunos continuam a mostrar dificuldades em distinguir área de perímetro e vários alunos revelaram dificuldade na determinação da área do triângulo e do perímetro e área do círculo. A leitura e interpretação dos enunciados das tarefas também se revelou difícil para os alunos, que demoravam imenso tempo a dar início às atividades. Esta situação pode resultar não só da dificuldade de interpretação das "palavras" dos enunciados, especialmente as que implicam conceitos novos, mas também da dificuldade em compreender os procedimentos e trabalho a realizar, para além da falta de concentração, própria da idade dos alunos e do trabalho de grupo.

Ao longo da unidade os alunos mostraram alguma dificuldade em definir estratégias e conceber e testar conjeturas. Revelaram muita insegurança a sugerir e testar hipóteses e foram muito sucintos no registo das conclusões. Para a descrição do modo como pensavam e respetivo registo, os alunos necessitaram de muito auxílio e incentivo, mas com o passar do tempo foram trabalhando melhor em grupo e elaborando cada vez mais as suas explicações e justificações, especialmente nas intervenções orais.

No que diz respeito ao perímetro, antes da unidade de ensino, os alunos revelaram ser capazes de considera-lo como sendo a linha à volta de uma figura mas mostraram dificuldade em determinar o perímetro de figuras simples, como um retângulo, ou de figuras que não tinham indicado as medidas de todos os lados. Com as fichas de trabalho 1 e 2 que contemplavam o uso do Geogebra e do geoplano, os alunos foram esclarecendo as suas dúvidas e clarificando as suas ideias, experimentando e determinando o perímetro de retângulos e outras figuras simples, chegando às conclusões pretendidas na discussão final. A distinção entre área e perímetro começou a ser evidente nestas fichas de trabalho, apesar de alguns alunos ainda revelarem algumas dificuldades na determinação do perímetro. Na ficha de trabalho 4 ainda apresentaram erros de redução nas unidades de medida, alguns erros de cálculo ou contagem e apresentaram dificuldade em relacionar a medida do perímetro com a sua unidade de medida, mas apesar dos erros cometidos e dificuldades demonstradas já não calcularam a área quando era solicitado o perímetro e vice-versa. O cálculo do perímetro do círculo foi um assunto que requereu maior esforço e dedicação e onde os resultados não foram tão bons quanto os esperados. O facto de ser um assunto novo e de se tratar de uma figura não poligonal aumentou bastante o grau de dificuldade. Com a ficha de trabalho 5 os alunos descobriram a relação existente entre o perímetro e o diâmetro, encontrando o valor de π e usando-o diversas vezes sem ser necessário recordá-lo, mas poucos usaram a fórmula para calcular o perímetro de círculos ou cometeram erros como multiplicar o valor do raio por π. Estes erros e dificuldades foram sentidos no teste final, pelo que as tarefas sugeridas e respetiva discussão não foram suficientes para que os alunos ficassem esclarecidos e realizassem uma aprendizagem significativa relativa a este assunto.

Em relação à aprendizagem da área, comparativamente ao perímetro, os alunos revelaram inicialmente muito mais dificuldade na compreensão deste conceito e cálculo do seu valor, mesmo em figuras como o retângulo ou previamente preenchidas com quadrículas, como foi possível verificar no teste diagnóstico, onde a percentagem de sucesso das questões 4 a), 4 b) e 5 foi muito baixa e vários alunos determinaram o perímetro da figura quando era solicitada a área. Ao longo da unidade de ensino e principalmente na ficha de trabalho 2, o preenchimento de figuras e a determinação de áreas usando unidades quadradas, tornou possível a compreensão deste conceito para grande parte dos alunos. Quase todos os grupos deduziram a fórmula da área do retângulo e perceberam que figuras diferentes poderiam ter a mesma área, reconhecendo a equivalência de figuras planas. As dificuldades agravaram-se na ficha de trabalho 3, onde era suposto deduzirem uma fórmula da área do triângulo, a partir da sua relação com o retângulo. Os alunos conseguiram estabelecer a relação entre a área das duas figuras mas poucos a usaram para calcular a área de triângulos, como se verificou no teste final (questões 7 a) e 11). A área do círculo, trabalhada nas fichas 6 e 7 também se revelou de difícil compreensão para os alunos, talvez por ser difícil dissociá-la da fórmula, que é muito semelhante à do perímetro e pode gerar confusão. À semelhança da área do triângulo, os alunos conseguiram relacionar a área do círculo com a área de um quadrado cujo lado tinha o mesmo comprimento que o raio do círculo, reconhecendo a constante π nessa relação, mas a passagem para o pensamento algébrico, generalizando a relação encontrada numa fórmula matemática, não foi tão bem sucedida. Na ficha de trabalho 7, os alunos estavam mais empenhados e facilmente perceberam que o círculo manipulado era equivalente a um retângulo cuja altura correspondia ao raio, mas nem todos conseguiram perceber que a base do retângulo correspondia ao perímetro do círculo e muito menos conseguiram deduzir uma fórmula que lhes permitisse obter a área do retângulo/círculo. Esta dificuldade foi também visível no teste final (questões 7 b) e 10), em que alguns alunos determinaram o valor do perímetro do círculo em vez da sua área.

Ao longo da unidade de ensino é possível verificar alguma evolução na aprendizagem dos alunos no que diz respeito à noção de perímetro e de área e respetiva distinção, em vários tipos de tarefa. Os alunos tornaram-se mais proficientes na resolução de problemas e mais participativos, quer oralmente, quer por escrito, aumentando a sua confiança nas suas intervenções orais e melhorando gradualmente a sua capacidade de comunicar matematicamente por escrito. De qualquer modo os resultados ficaram um pouco aquém das expetativas pelo que, futuramente, a unidade de ensino deverá ser reformulada no sentido de focar o trabalho nas dificuldades diagnosticadas, a fim de permitir que possam ser mais facilmente ultrapassadas.

Capítulo 6

Estudos de Caso

Neste capítulo apresento os dois estudos de caso, Mariana e João. Em cada um deles faço uma caracterização dos alunos e analiso o seu desempenho nas entrevistas, antes da unidade de ensino (questões do teste diagnóstico), durante e depois dessa unidade, de modo a conhecer a evolução dos alunos.

6.1. O caso de Mariana

6.1.1. Apresentação

Mariana tem 10 anos e transitou sempre de ano. É uma menina educada, bem-disposta, empenhada e disponível para ajudar os colegas, desde que façam um esforço por aprender. Vive com os pais e o irmão mais velho. No 1.º ciclo esteve sempre na mesma escola e, à exceção do 1.º ano, teve sempre a mesma professora, que refere ter sido muito importante para si e para os colegas, que também a acompanharam ao longo deste ciclo de escolaridade. A sua disciplina preferida é a Matemática porque acha divertido utilizar os números e porque, como a própria refere, "a Matemática está em todo o lado". Considera ter tido um bom percurso, com boas notas e no presente ano letivo sente-se bem em relação à disciplina. Tem conseguido aprender e gosta da professora, apesar de considerar que a turma não é muito boa.

Vê-se a si mesma como uma boa aluna a Matemática porque tem apresentado bons resultados, estuda e não acha a disciplina difícil. Quando tem dúvidas esclarece-as com a professora ou família. Gostava de ter mais tempo para dedicar ao estudo e não o faz devido às várias atividades extracurriculares que frequenta. Gosta de desafios pois é sinal que depositam confiança nela para os conseguir ultrapassar. Gosta de trabalhar em grupo quando o grupo é bom e os seus elementos se podem ajudar mutuamente para melhorar os resultados. Nem sempre gosta das discussões das tarefas porque os colegas não estão concentrados e são barulhentos mas acha esse trabalho importante porque pode ter resolvido mal alguma questão e assim pode corrigir ou verificar que existem mais opções de resolução.

Na entrevista Mariana revelou estar muito entusiasmada por trabalhar com o Geogebra dizendo que "se nós conseguirmos fazer tudo o que a professora pedir acho que vai ser muito bom e vai desenvolver os nossos cálculos e o nosso cérebro e acho que se nós pensarmos, mesmo naqueles alunos que têm muitas dificuldades e muito mal comportados, acho que vamos conseguir todos ter boas notas". Mostrou entusiasmo em estudar mais aprofundadamente o tema "Áreas e perímetros" e revelou ter algumas dificuldades por não se lembrar muito bem do que estudou no 1.º ciclo e de ter sido um assunto pouco trabalhado.

6.1.2. Compreensão de perímetro e área antes da unidade de ensino

Perímetro

Vejamos o desempenho de Mariana na primeira entrevista num conjunto de tarefas relativas à determinação do perímetro e resolução de problemas envolvendo esta grandeza.

Questão 1. A questão 1 pedia para determinar o perímetro de três figuras. Mariana não teve dificuldade em nenhuma das três figuras. Para calcular o perímetro do decágono correspondente à figura A, que apenas tinha a indicação do comprimento de cinco dos dez lados, explicou que pensou do seguinte modo:

> **Mariana:** Hã, eu pensei, medi todos os lados, aqui nos dois centímetros (apontando para o lado com a indicação de 2 cm da figura A), achei que este também era porque medi com a régua e vi quanto é que era e então medi e vi que dava o mesmo que tinha metido, no teste diagnóstico, estava. Então, por isso sei que era e calculei todos os lados e deu-me… hã…os vinte e quatro centímetros.
>
> **Professora:** O que é que tu chamas calcular todos os lados?
>
> **Mariana:** Fazer a soma.

Professora: Fazer a soma. Juntar, é isso?

Mariana: Sim.

Mariana indicou na figura o comprimento dos lados que faltavam e fez mentalmente a soma. Percebeu que o perímetro correspondia à soma de todos os lados da figura. A figura B encontrava-se desenhada em papel quadriculado, com a indicação de que o lado de uma quadrícula correspondia a uma unidade. Mariana também não teve dificuldade em responder mas sentiu necessidade de apresentar o resultado em unidades do sistema métrico, neste caso, centímetros, referindo ser uma unidade de medida com a qual está habituada a trabalhar e que se adequa à situação:

Mariana: Hã… Aqui está a dizer que cada "coisinho", cada tracinho de um quadrado é um, por isso, calculei todos os, contei primeiro todos os quadradinhos, as riscas que estavam por fora e depois fiz vezes o número, que me deu vinte e quatro centímetros, também.

Professora: Mas estava lá centímetros?

Mariana: Não.

Professora: Optaste por pôr centímetros?

Mariana: Sim.

Professora: Porquê?

Mariana: Então, porque… Não sei… Porque, por exemplo… Um metro também não podia ser. Um metro nem esta folha chega a ter. Hã… Um decímetro também não porque era muito grande. Então optei por um centímetro.

Professora: Só podia ser centímetros, metros ou decímetros, é isso? Não podia ser outras coisas?

Mariana: Podia.

Professora: Podia. Muito bem, mas neste caso optaste por centímetros?

Mariana: Sim, optei e porque estou mais habituada a trabalhar com centímetros.

Na figura B, Mariana contou um a um todos os "tracinhos" correspondentes a uma unidade e fez a contagem correta, apesar de não corresponderem a 24 centímetros pois a unidade de medida não correspondia a 1 cm, mas sim ao lado de uma quadrícula da figura. A figura C correspondia a um triângulo, que tinha indicado o comprimento de cada um dos lados. A aluna somou, mentalmente, o comprimento dos três lados, obtendo o valor correto do perímetro e respetiva unidade de medida.

Questão 2. Nesta questão era dado o comprimento do lado de um quadrado para o cálculo do seu perímetro. Mariana teve alguma dificuldade em responder e apenas considerou dois lados para determinar o perímetro.

> 2 – Sabendo que a medida do comprimento de um quadrado é 5,2 cm, calcula o seu perímetro.
> 5,2 x 2 = 10,4 cm de perímetro

TD – Q2

Ao explicar o seu raciocínio reconheceu que estava errada:

Mariana: Eu aqui acho que baralhei-me com a área, por isso acho que fiz mal e pensei mal.

Professora: Mas o que é que fizeste? Explica-me o que é que tinhas feito aí.

Mariana: Eu aqui fiz cinco vírgula dois centímetros, vá, vezes dois porque, digamos que eu baralhei-me, pronto, porque há muito tempo que já não fazia, então baralhei-me um pouco, fiz vezes dois que me deu dez vírgula quatro centímetros.

Professora: Porquê "vezes dois"?

Mariana: Não sei. Hã… Acho que baralhei-me completamente.

Professora: Mas hás de ter pensado que o "vezes dois", o que é que significa esses dois, para ti? O "vezes dois" para ti?

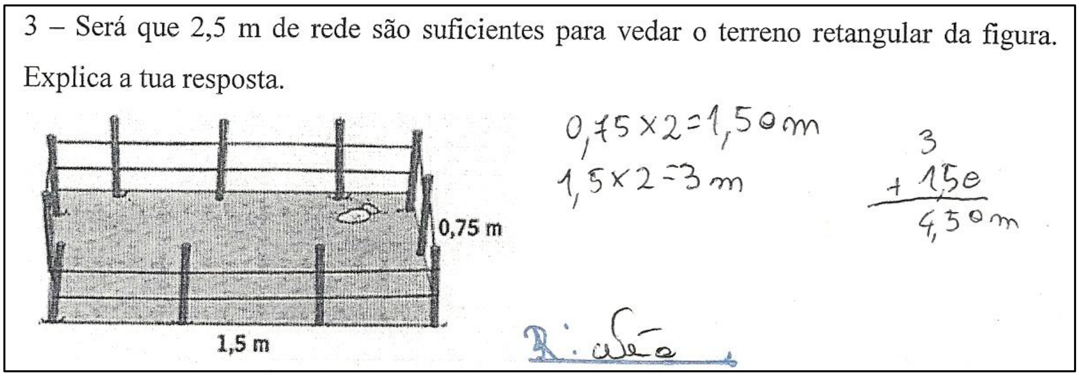
Mariana: Então, há comprimento e a largura. Foi aí que eu fui buscar o "vezes dois".

Professora: Ah, muito bem. Dois porque é um comprimento e uma largura?

Mariana: Sim…

O facto de o quadrado ter os lados todos iguais e a questão se referir ao comprimento e não ao lado pode ter confundido a aluna, que afirma ter confundido o perímetro com a área. A aluna apercebeu-se do seu erro e reconheceu que a resposta estava errada, até porque conseguiu resolver com êxito a questão 3.

Questão 3. Os alunos tinham de identificar e calcular a medida do perímetro de um terreno retangular. Mariana facilmente resolveu a questão e explicou o seu raciocínio:



TD – Q3

Mariana: Eu, eu meti não porque fiz os setenta e cinco vezes dois porque temos, repete-se aqui os setenta e cinco centímetros, hã, e deu-me um metro vírgula cinquenta e depois mais o outro, e os outros três metros que foi a multiplicação por dois, de um vírgula cinco metros, hã, deu-me três. Juntei isso tudo e deu-me quatro vírgula cinquenta metros. Por isso, vi logo que não dava.

Professora: E porque é que, por que é que juntaste os lados todos?

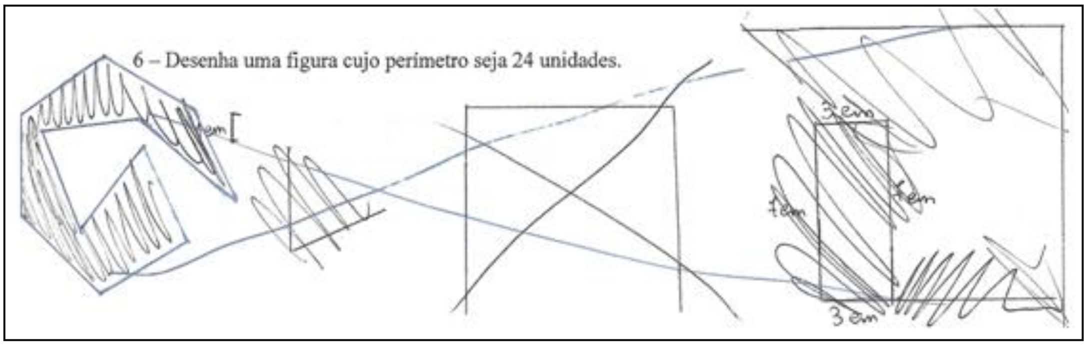
Mariana: Porque é assim que se mede o perímetro.

Professora: É assim que se mede o perímetro, muito bem. E querias calcular o perímetro, mas a pergunta não dizia calcula o perímetro.

Mariana: Pois não mas está a pedir a rede, a rede não está dentro, hã, não é a área, por isso é o perímetro.

Pela explicação de Mariana, a aluna compreendeu que era necessário calcular o perímetro, por se tratar da medida à volta do terreno, somando os quatro lados da figura e indicando corretamente a unidade de medida. É percetível que consegue distinguir entre área e perímetro.

Questão 6. Esta questão implicava a compreensão de perímetro, requerendo a construção de um figura com um perímetro fixo, sem especificação da unidade de medida. Mariana atrapalhou-se com a falta de unidade de medida do sistema métrico e fez várias tentativas.



TD – Q6

Mariana reconheceu que confundiu unidades com centímetros e tentou desenhar uma figura com 24 cm de perímetro, mas ao mesmo tempo tentou fazer coincidir uma unidade com 0,5 cm, o que a confundiu ainda mais, como explica:

Mariana: Pois como é que, eu não, eu não percebi se as unidades quadradas, hã, ai, as unidades eram de uma forma ou eram de outra. Andei aí, hã, foi muito difícil e a que eu consegui chegar foi esta (figura da esquerda) mas acho que ficou mal.

Professora: Explica.

Mariana: Porque eu fiz aqui mas não se nota, fiz, meti um centímetro que, que era suposto ser… Uma unidade. Então fui fazendo. Ao todo aqui eu acho que estão vinte e quatro unidades mas acho que ao mesmo tempo não estão.

Professora: Então volta a contar.

Mariana: Hã, preciso de uma régua.

Professora: Então mas vais considerar um tracinho, uma unidade, ou estás a considerar os centímetros na mesma?

Mariana: Hã, estou aqui a utilizar os centímetros para não me baralhar e fiz que metade de um centímetro, hã, é come se fosse uma unidade.

Professora: Então, então explica-me lá como é que chegaste aí a esses “vinte e quatro”?

Mariana: Esses vinte e quatro, cheguei fazendo, eu, aqui baralhei-me imenso, por isso dividi os vinte e quatro em dois.

Professora: Muito bem.

Mariana: Que me deu doze e depois esses doze hã, hã vi qual era hã, hã, quais eram as tabuadas onde o doze entrava, hã, que dá doze. Verificamos que o doze era múltiplo desse número e descobri que era do três, do, e do quatro. Então decidi fazer com quatro centímetros, hã, doze, doze “coisinhas” dessas.

Professora: Doze quê? Traços?

Mariana: Hã, sim traços, praticamente.

Mariana, uma vez mais, percebeu que necessitava de encontrar a linha à volta da figura mas ficou confundida com a expressão do enunciado: “24 unidades”. Pela sua necessidade de usar centímetros referiu ter considerado uma unidade, meio centímetro, sendo que o perímetro da figura passaria a ser 12 cm, mas Mariana queria desenhar a figura com 24 cm e não com 24 unidades.

Professora: Hum, então se eu agora fizesse a pergunta: qual é o perímetro dessa figura?

Mariana: Hã, eu, eu ia dizer vinte e quatro centímetros.

Professora: Vinte e quatro centímetros ou vinte e quatro unidades?

Mariana: Centímetros… Porque o que conta… Aqui as unidades é como, eu meti as unidades a um centímetro, este espacinho (referindo-se ao meio centímetro) e depois fiz. Por isso, é como não houvesse unidades e sim centímetros.

Professora: Então consideraste as unidades os centímetros ou consideraste as unidades metade de um centímetro?

Mariana: Hã, considerei as unidades metade do centímetro.

Professora: Então se a figura tem vinte e quatro centímetros… vai ter mais unidades. É isso?

Mariana: Hã… Não tenho a certeza.

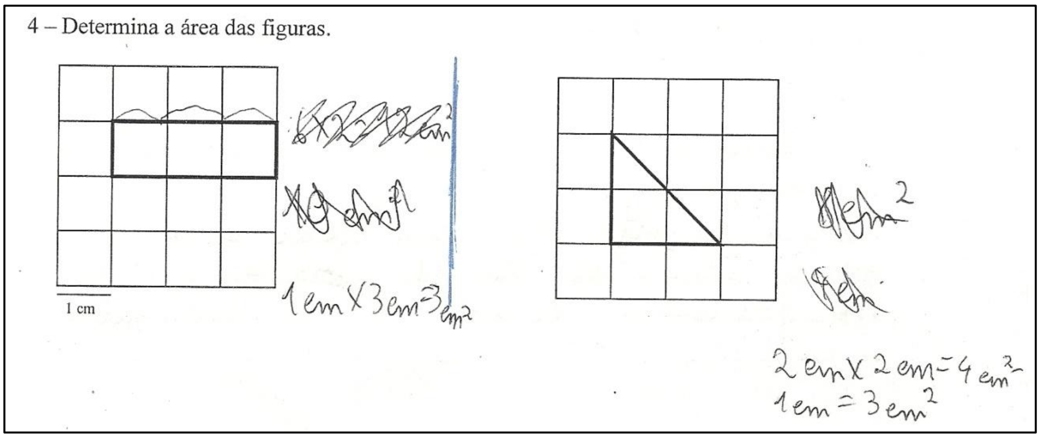
Com a minha intervenção, Mariana ficou confusa mas a sua figura, se tivesse doze lados, em vez de onze, teria os 24 cm de perímetro, sendo que cada lado tinha, no seu desenho, 2 cm e não 1 cm como refere. A sua confusão adveio da incorreta utilização da unidade de medida e não da compreensão de perímetro.

Síntese. Mariana revela uma compreensão de perímetro, reconhecendo que está relacionado com o que se encontra à volta de algo. Consegue determinar o perímetro de figuras simples como o triângulo, retângulo ou outros polígonos, mesmo que não tenham a indicação do comprimento de todos os lados. Numa figura colocada em papel quadriculado também determina o perímetro mas indica a unidade de medida em centímetros. Não reconhece a existência de unidades de medida que não as do sistema métrico. Para Mariana não faz sentido falar unicamente em unidades, daí a sua dificuldade em resolver a questão 6. De qualquer modo, associa o perímetro a unidades de comprimento e não de área. Na determinação do perímetro do quadrado da questão 2, calcula apenas metade do perímetro, pois não reconhece que o comprimento e a largura num quadrado são iguais mas admite que o seu raciocínio não estava correto e poderia ter confundido área e perímetro.

Área

No que diz respeito às questões relacionadas com a área, o desempenho de Mariana não foi tão bom, especialmente na área de figuras que não o retângulo.

Questão 4. Esta questão requeria apenas a indicação da área de figuras previamente preenchidas com quadrículas com 1 cm de lado. A primeira figura era um retângulo e a segunda um triângulo. Mariana apenas teve dificuldade em determinar a área do triângulo, mas para determinar a área do retângulo usou uma fórmula em vez de contabilizar as quadrículas. Como não tinha aprendido nenhuma fórmula da área do triângulo, não conseguiu determinar a área deste com sucesso, como se pode verificar na sua resposta.



TD – Q4

Apesar de indicar corretamente a unidade de medida (centímetros quadrados), Mariana não faz a sua leitura corretamente, talvez por não associar a unidade de medida a unidades quadradas e não reconhecer o centímetro quadrado como um quadrado com 1 cm de lado. Mariana não contabilizou os quadrados do interior da figura e limitou-se a multiplicar um lado pelo outro do retângulo, sabendo que obteria centímetros quadrados em vez de centímetros, como se verifica na sua explicação:

Mariana: Hã, eu na primeira figura vi que um centímetro era cada linha, então fiz aqui, que me deu três centímetros vezes um centímetro, deu-me três centímetros cúbicos… hã…

Professora: Porquê cúbicos?... Não, tu não escreveste três centímetros cúbicos!

Mariana: Está aqui dois.

Professora: E "o dois" é cúbicos que se lê?

Mariana: É.

Professora: Tens a certeza?

Mariana: (Ri-se de modo envergonhado) Hã… hum… sim… a certeza.

Professora: … Então "os cúbicos" é um "dois" em cima?

Mariana: Sim.

É notória a confusão de Mariana na leitura de potências e, de acordo com a sua explicação, limitou-se a usar a fórmula da área do retângulo para determinar a área da figura, o que a impediu de conseguir determinar a área do triângulo.

Mariana: Aqui, tive um pouco de dificuldade porque era um triângulo, então fiz como se fosse um quadrado e depois tirei um centímetro, hã, que me deu três centímetros cúbicos porque tirei um centímetro, porque, hã … nós vimos, hã… porque eu pensei no, nisto aqui (apontando para a base do triângulo da figura), então tirei um centímetro.

Professora: Portanto na primeira imagem multiplicaste um lado pelo outro lado?

Mariana: Sim, mas depois aqui também multipliquei…

Professora: E aí fizeste, multiplicaste um lado por outro lado e retiraste…

Mariana: Um centímetro.

Professora: Porquê um?

Mariana: Hã, por causa desta parte aqui … mas acho que devia ter tirado dois, centímetros…

Professora: … não conseguiste arranjar outra maneira de descobrir a área?

Mariana: Não consegui… Ao princípio tinha pensado em contar todas, todos os risquinhos mas vi logo que isso aí não ia dar a área.

Professora: Porquê?

Mariana: Porque se contarmos os risquinhos não, por exemplo, se eu contar estes aqui de fora estou a contar o perímetro mais os de dentro e eu não quero o perímetro nem os risquinhos de dentro, eu quero a área, que é tudo o que está dentro.

Mariana percebeu que a área do triângulo e do retângulo não se determinam do mesmo modo e que não se podem contabilizar os "riscos" da figura porque senão estar-se-ia a determinar o perímetro e, segundo ela própria diz, a área envolve a parte interior da figura.

Professora: Tudo o que está dentro. Mas aqui (apontando para a imagem do retângulo) não consideraste tudo o que estava dentro ou consideraste?

Mariana: Considerei o espaço que estava dentro, não os risquinhos…

Professora: E o que é que está lá dentro?

Mariana: Lá dentro está centímetros, está o espaço dessa coisa. Como nós estivemos a medir uma casa, hã, por exemplo, temos um metro, assim com um risco e depois temos de ver o que está lá dentro, não é o que conta nem isto aqui como se fosse um azulejo. Nos azulejos nós não contamos os riscos, contamos é o que está por dentro.

Professora: Então, se isso tivesse aí azulejos, quantos azulejos é que tinha?

Mariana: Tinha três.

Professora: E a outra figura?

Mariana: A outra figura tinha dois.

Professora: Porquê dois?

Mariana: Porque estas duas metades, hã, ao todo, fazem um, mais este quadrado completo, faz dois.

Professora: Então, se contasses azulejos dava-te dois azulejos?

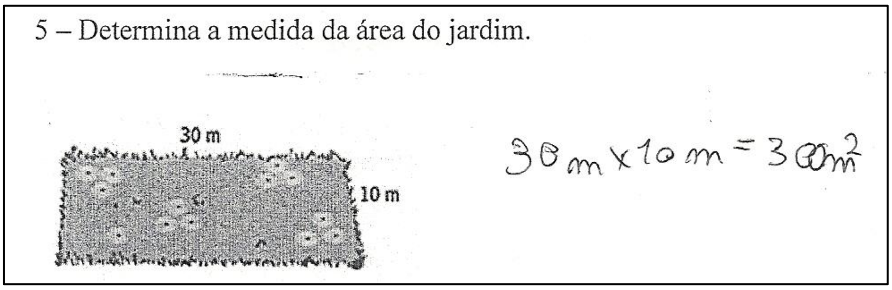
Mariana: Sim.

Professora: Contando da maneira que tu fizeste dava, dá três!

Mariana: Pois dá porque eu enganei-me.

Mariana afirmou que a área correspondia a um espaço que pode ser preenchido com azulejos e, alertada para essa noção de área, reconheceu que o triângulo só tinha dois quadrados no seu interior. Estava tão focada na fórmula que não usou o seu conhecimento do conceito de área para determinar a área do triângulo, tendo identificado o seu erro após a discussão com a professora.

Questão 5. Nesta questão, por se tratar de um jardim retangular, Mariana voltou a usar a fórmula sua conhecida e indicou corretamente a unidade de medida.



TD - Q5

Mariana: Ao menos eu sei que aqui a área é o que está por dentro, fiz estes dois lados que já estava a dizer o perímetro desses dois lados, hã, e multipliquei-os, que me deu trezentos metros, só que mais uma vez meti "o dois", não sei porquê.

Professora: Era como se fazia no 1.º ciclo?

Mariana: Era.

Professora: Então o que está por dentro é multiplicar os lados?

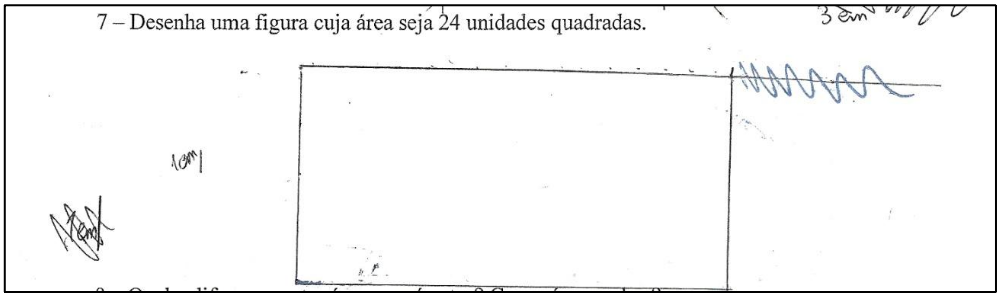
Mariana: Sim.

Professora: E é só assim que se calcula a área?

Mariana: Hã, foi a única forma que eu aprendi.

Também nesta questão se percebe que Mariana associa a área a uma fórmula e tem o hábito de usar como unidade de medida centímetros quadrados ou metros quadrados, que lê cúbicos, apesar de colocar como expoente o número dois. Indicou o expoente dois sem compreender porque o fazia.

Questão 7. À semelhança da questão anterior, nesta questão era solicitado aos alunos que desenhassem uma figura com 24 unidades quadradas de área. Apesar de vários alunos relacionarem as unidades quadradas aos quadrados do interior de uma figura, Mariana foi coerente com o seu raciocínio e usou a fórmula do retângulo para tentar encontrar um retângulo em que o produto do valor do comprimento dos lados fosse vinte e quatro, apresentando a seguinte resposta e explicação:



TD – Q7

Mariana: Hã, eu aqui decidi, porque eu sei, se é área é tudo isto aqui por dentro, por isso, hã, fiz aqui, já não me lembro o que é que isto tinha e o que é que isto tinha (apontando para o comprimento e largura do retângulo desenhado) de forma a fazer "isto vezes" e dar vinte e quatro. Porque cada tracinho que eu fiz aqui pequenino, que agora isto tudo junto faz uma, um segmento de reta. Hã, utilizei isso tudo e cada tracinho que constituísse segmento de reta, hã, tem um centímetro. Por isso, arranjei uma forma de fazer com que este aqui tivesse uma medida.

Professora: E qual é a medida? Desse lado?

Mariana: Ai já não me lembro, hã…

Professora: Então disseste-me que tinhas arranjado dois números que fizessem vinte e quatro.

Mariana: Sim.

Professora: Então quais foram?

Mariana: Acho que foi… o doze…hã…foi o, acho que foi o seis aqui e o quatro aqui.

Professora: E como é que mediste "esse seis" e "esse quatro"?

Mariana: Fiz com a minha régua.

Professora: Fizeste com a régua. Então vamos voltar a medir para ver se dá?

Mariana: Este lado tem oito.

Professora: E o outro?

Mariana: Oito centímetros, não, (medindo), hã, e o outro tem quatro.

Professora: Então não usaste “o seis” e “o quatro”, foi o oito e o quatro.

Mariana: Hum hum.

Professora: Qual é a área que tu achas que tem essa figura?

Mariana: Esta figura tem, trinta e dois centímetros, unidades quadradas, ou seja, trinta e dois, hã, sim, trinta e dois unidades quadradas.

De acordo com a sua explicação, Mariana teria desenhado um retângulo com seis centímetros de comprimento e quatro de largura, mas quando confrontada com a sua medição verificou que o retângulo desenhado não tinha a área solicitada na questão, porque as medidas não estavam corretas.

Numa tentativa de elucidar a aluna e orientá-la para a compreensão de unidade quadrada continuei a discussão:

Professora: Mas eu, só de olhar para ela, não sei. Onde é que eu tenho aí as unidades quadradas?

Mariana: Hã, é o que está aqui dentro.

Professora: Mas não está lá dentro nada!

Mariana: Ah!

Professora: Eu não vejo nada lá dentro.

Mariana: Esqueci-me de fazer os quadrados.

Professora: Então o que serão as unidades quadradas?

Mariana: As unidades quadradas são vinte e quatro quadradinhos todos juntos.

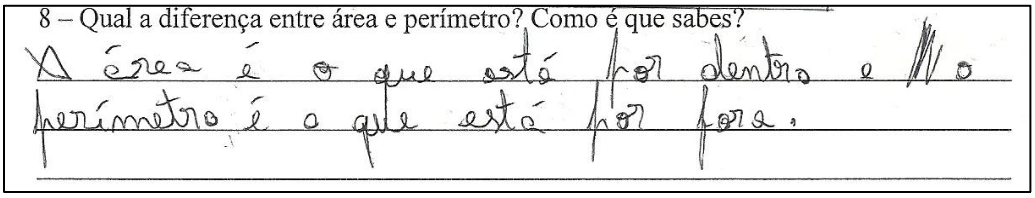
Após esta discussão, Mariana percebeu que deveria ter desenhado uma figura com 24 quadrados no seu interior, uma vez que a área eram 24 unidades quadradas. Surgiu, nesta altura, uma compreensão de área dissociada de fórmulas matemáticas, considerando o conhecimento prévio de que a área corresponde a “espaço interior” de algo.

Síntese. Mariana revela que sabe usar a fórmula da área do retângulo, indicando corretamente as unidades de medida de área, apesar de não conseguir fazer a sua leitura. O cálculo da área do retângulo é reduzido ao uso de uma fórmula memorizada. A aluna refere que área corresponde ao espaço interior de uma figura, que até pode ser preenchida de diversas formas mas não usa esse conhecimento para determinar a área de figuras previamente preenchidas com quadrículas. A sua compreensão do conceito de área é, deste modo, limitada. Além disso, consegue distinguir unidades de comprimento de unidades de área, no que diz respeito à indicação da unidade de medida de perímetro e de área, respetivamente, mas não as usa com compreensão. A sua necessidade de trabalhar com unidades de medida do sistema métrico também é evidente nas tarefas relacionadas com a área.

Distinção entre perímetro e área

Seguidamente apresento a análise do desempenho da aluna nas questões que envolvem a distinção entre perímetro e área, da primeira entrevista.

Questão 8. Esta questão pedia que a aluna indicasse a diferença entre área e perímetro e referisse como obteve esse conhecimento. Mariana escreveu a resposta seguinte:


8 – Qual a diferença entre área e perímetro? Como é que sabes?
A área é o que está por dentro e o perímetro é o que está por fora.

TD – Q8

De um modo simples e pouco formal do ponto de vista matemático, Mariana encarava as duas grandezas como distintas mas não se referiu à forma como era capaz de fazer essa distinção, dizendo:

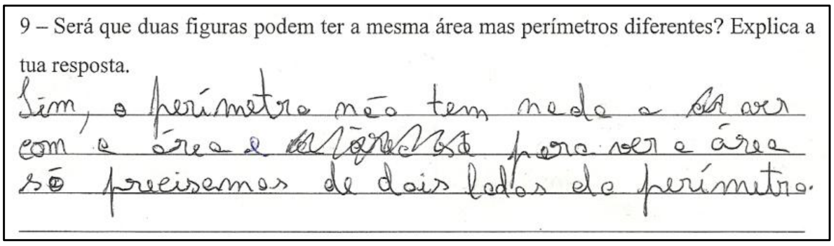
Mariana: Eu, aqui, como é que sabes, baralhei, hã, eu ia dizer que aprendi, mas acho que assim ficava assim um bocadinho, digamos, hã, feia, digamos.

Professora: Mas pode ser. Foi o que aprendeste, aprendeste onde? Em casa, na escola, com a professora?

Mariana: Na escola, com a professora do 1.º ciclo. Aprendi com ela mas como, foi assim, ela ensinou que a área e o perímetro não é nada igual porque o perímetro é o que está por fora que se conta e a área é o que está por dentro que se conta, não é o que está por fora e aí já está uma grande diferença.

Área e perímetro não eram conceitos novos, na medida em que conseguia diferenciar o cálculo destas medidas, especialmente no retângulo. Como seria de esperar, a aluna não fez qualquer referência à distinção das unidades de medida e justificou o seu conhecimento com base nas aprendizagens do 1.º ciclo.

Questão 9. Esta questão permite verificar se os alunos reconhecem a existência de figuras equivalentes ou se este assunto era novidade. Mariana reconheceu que é possível existirem figuras com a mesma área e perímetro diferente mas não por serem equivalentes ou terem formas diferentes.


9 – Será que duas figuras podem ter a mesma área mas perímetros diferentes? Explica a tua resposta.

Sim, o perímetro não tem nada a ver com a área e está para ver a área só precisamos de dois lados do perímetro.

TD – Q9

Mariana: Hã, podem ter a mesma área, hã, porque as áreas podem ser iguais mas acho que os perímetros podem ser diferentes, por exemplo, posso ter, ou, posso ter, por exemplo, quero chegar a um número e faço coisas dessa tabuada mas noutras tabuadas que também dê esse número, ou seja, a área tem de ser um mínimo múltiplo comum. Foi assim que eu pensei e o que está por fora pode ser diferente.

Professora: Muito bem. Está? Queres acrescentar mais alguma coisa?

(Mariana abana a cabeça).

A resposta de Mariana revela que é baseada no conhecimento que tem das fórmulas matemáticas do perímetro e área do retângulo. Duas figuras podem ter a mesma área porque o mesmo número pode ser decomposto de forma diferente, ou seja, o comprimento e a largura podem ser diferentes mas o seu produto ser igual. Esta ideia é claramente baseada na fórmula da área do retângulo (comprimento × largura), estudada no 1.º ciclo.

Síntese. Para Mariana perímetro e área são grandezas distintas e figuras com a mesma área podem ter perímetros diferentes Nesta fase, a aluna consegue aplicar fórmulas para determinar o perímetro e a área, especialmente no retângulo e faz a indicação correta das unidades de medida do sistema métrico, correspondentes. Sabe que a área corresponde ao espaço interior de uma figura e que perímetro é uma medida de comprimento à volta mas não utiliza este conhecimento para determinar a área de outras figuras que não o retângulo. Apenas reconhece como unidades de medida, as do sistema métrico e tem alguma dificuldade em fazer a leitura das unidades de área, usando a expressão "cúbicos". Nesta fase as suas ideias são pouco formais e, principalmente no que diz respeito à área, não revelam aprendizagem com significado.

6.1.3. Compreensão de perímetro e área durante a unidade de ensino

Como foi sendo habitual ao longo do ano, durante a unidade de ensino Mariana foi bastante participativa, colaborando nas discussões finais mostrando sentido crítico e ouvindo as opiniões dos colegas, tentando compreender as suas resoluções. Mostrou-se muito empenhada, quer na realização das tarefas, quer na sua discussão. Nas primeiras fichas trabalhou com Bárbara, uma aluna pouco empenhada, com imensas dificuldades e o raciocínio lógico-abstrato pouco desenvolvido. Mariana ajudou bastante a colega e o trabalho, neste grupo, resultou de modo bastante positivo. Nas fichas de trabalho 6 e 7 trabalhou com Pedro, um colega bastante trabalhador, empenhado e participativo, com bom aproveitamento. Seguidamente apresento algumas situações vivenciadas ao longo das aulas, que me pareceram significativas no seu percurso, pelo possível contributo na evolução da sua compreensão de perímetro e área.

Perímetro

Na primeira entrevista Mariana não mostra dificuldade em determinar o perímetro de figuras e indica unidades de medida de comprimento. No decorrer da unidade de ensino continua a fazê-lo de forma correta e durante a discussão de uma tarefa da ficha de trabalho 4, claramente referiu que no cálculo de perímetros se usam centímetros e no cálculo das áreas são usados centímetros quadrados.

Professora: (Constatando a falta da unidade de medida na resposta) Olha é para calcular o perímetro em que unidade de medida?

Rui: Centímetros quadrados.

Professora: Centímetros quadrados. As unidades do perímetro são centímetros quadrados?

Alguns alunos: Não.

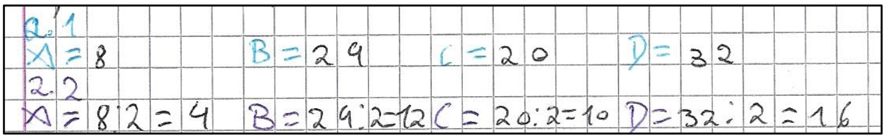
Professora: Porque não?

Mariana: Isso é quando é a área.

Professora: Isso é quando é a área.

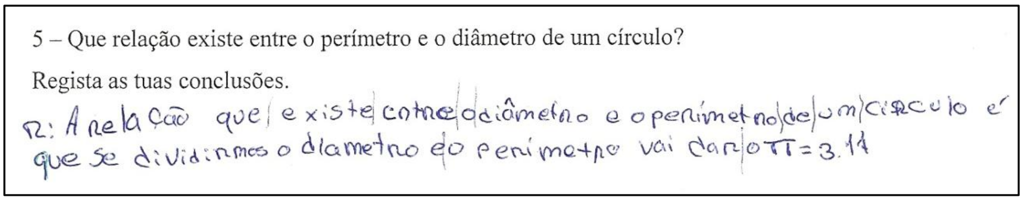
Mariana: Pede o perímetro, é para fazermos em centímetros.

Também na ficha de trabalho 4 Mariana consegue relacionar o perímetro com a dimensão da unidade de medida, evitando o uso de unidades de medida do sistema métrico em situações onde a unidade de medida não é especificada. Na tarefa 1 a) já não coloca unidades de medida do sistema métrico e na tarefa 2, alínea b), Mariana percebeu que o perímetro de uma figura seria metade quando a sua unidade de medida passava a ser o dobro. Veja-se a sua resposta:


2.1
A = 8 B = 24 C = 20 D = 32
2.2
A = 8:2 = 4 B = 24:2=12 C = 20:2=10 D = 32:2 = 16

FT4 – Tarefa 2

O perímetro do círculo foi trabalhado na ficha 5 e o grupo de Mariana foi único a chegar à conclusão pretendida, que evidenciava a relação entre o perímetro e o diâmetro, embora escrita de modo informal:

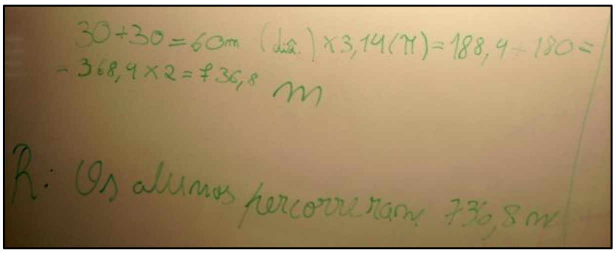

5 – Que relação existe entre o perímetro e o diâmetro de um círculo?

Regista as tuas conclusões.

R: A relação que existe entre o diâmetro e o perímetro de um circulo é que se dividirmos o diametro do perimetro vai dar o π = 3.14

FT5 – Tarefa 5 (Mariana e Bárbara)

Na ficha de trabalho 5 A**,** Mariana conseguiu resolver uma situação problemática envolvendo o perímetro do círculo, aplicando com destreza a fórmula descoberta e discutida na ficha de trabalho anterior, explicando aos colegas o seu raciocínio e relacionando o raio e o diâmetro com o perímetro de modo correto, bem como usando a unidade de medida adequada.



FT 5A - Tarefa 2.

Área

No que diz respeito à determinação de áreas, na primeira entrevista Mariana revelou alguma dificuldade em encontrar a área de figuras não retangulares, estando muito focada na fórmula da área do retângulo para calcular a sua área, como se nota na discussão inicial antes da ficha de trabalho 2.

> **Professora:** Então se eu fizer esta figura (construindo um retângulo grande no geoplano), como é que eu sabia a área deste retângulo que eu tenho aqui, grande? O que é que eu fazia?
>
> **Rodrigo:** Contando os pregos.
>
> **Professora:** Contando os pregos? Os pontos lá dentro?
>
> **Mariana:** Não. Fazendo um lado, o comprimento e outro o da largura, vezes e ia dar a área.
>
> **Professora:** Será que eu preciso de fazer isso para saber isso, para contar aqui qual é o espaço dentro, que está dentro deste retângulo?

Nesta fase Mariana ainda não fazia referência à contagem de quadrículas do interior do retângulo para obter a sua área. Após uma breve exploração do conceito de área, usando o geoplano Mariana reconheceu que a fórmula que usava não funcionava para todas as figuras planas.

> **Professora:** Porque é que isso é o mesmo que contar os quadradinhos todos um a um?
>
> **Pedro:** Porque a largura vezes o comprimento dá a área.

Professora: Dá a área de qualquer figura?

Pedro: Não.

Mariana: Não, nem de todas.

Na discussão final da ficha de trabalho 2 Mariana mostrou curiosidade em determinar áreas de outro modo e já fez referência à contagem de quadrículas do interior das figuras como uma forma de obter a área de qualquer figura.

Mariana: Professora como é que podemos achar a área deste tipo de figuras…
Professora: Vendo o que está lá dentro.
Mariana: Contando os quadradinhos?
Professora: Contando os quadradinhos.
Mariana: E se não tiver quadrados como é que fazemos?
Professora: E se não tiver quadrados. Ora bem…

Na discussão da ficha de trabalho 3, relativa à área do triângulo, Mariana compreendeu a relação existente entre a área do retângulo e do triângulo, sendo a primeira aluna da turma a encontrar uma forma rápida de calcular a área do triângulo.

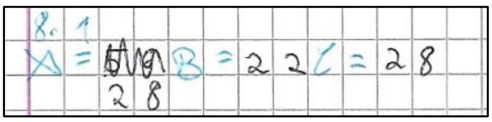
Professora: Multiplicávamos, muito bem. Multiplicando o comprimento pela largura ou pela altura obtemos a área do retângulo. Então como é que será a área do triângulo?

Mariana: É metade da do retângulo.

Professora: Então o que é que eu tenho de fazer?

Mariana: Primeiro temos de fazer uma conta de multiplicação para sabermos qual é a área do retângulo e depois esse resultado temos de dividir em dois.

Na ficha de trabalho 4, na tarefa 4, Mariana indica a área das figuras, contabilizando as quadrículas do seu interior e, embora não apresente qualquer unidade de medida, também não coloca, erradamente, unidades do sistema métrico.



FT4 – Tarefas 4

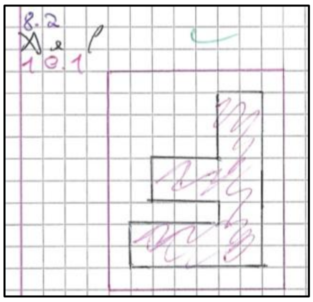
Na ficha de trabalho 6, relacionada com o estudo da área do círculo, Mariana e o seu colega Pedro conseguiram relacionar a área do quadrado com o círculo da figura e a aluna facilmente indicou que o facto da área do círculo ser o triplo da área do quadrado estava relacionada com π. A sua intervenção na discussão da tarefa foi importante para se obterem as conclusões pretendidas. Na ficha de trabalho 7, já tinha encontrado uma fórmula para o cálculo da área do círculo, pelo que na discussão da ficha 7 apresentou-a, referindo que era fácil como se pode observar neste excerto da discussão:

> **Professora:** A altura do retângulo é o raio do círculo. Esta parte é a mais importante (fazendo o registo desta conclusão no quadro).
>
> **Catarina:** E a base é metade da circunferência.
>
> **Professora:** E a base é metade da circunferência. Esta parte é que revela compreensão, do porque é que isto é assim. Perceberam porque é que isto é assim?
>
> **Mariana:** Então é o raio vezes o raio vezes o π.
>
> **Professora:** Eu podia chegar aqui e dizer: a área do círculo calcula-se assim e vocês decoravam ou não decoravam.
>
> **Mariana:** É fácil, é raio vezes o raio vezes π.

Mariana revela ter melhorado as suas ideias no que diz respeito ao estudo da área de várias figuras, poligonais ou não.

Distinção entre perímetro e área

Nas tarefas em que a área e o perímetro eram estudadas em simultâneo, Mariana revelou alguma destreza e, tal como já tinha demonstrado na primeira entrevista, conseguiu distinguir as duas grandezas, mesmo em situações problemáticas e atingir os objetivos propostos. Nesta fase Mariana já consegue identificar figuras equivalentes e desenhar uma figura congruente numa posição diferente, revelando conhecer e aplicar as noções de equivalência e congruência de figuras planas como se pode verificar na sua resposta à tarefa 5 da ficha de trabalho 4, realizada individualmente.



FT4 – T5

6.1.4. Compreensão de perímetro e área após a unidade de ensino

Perímetro

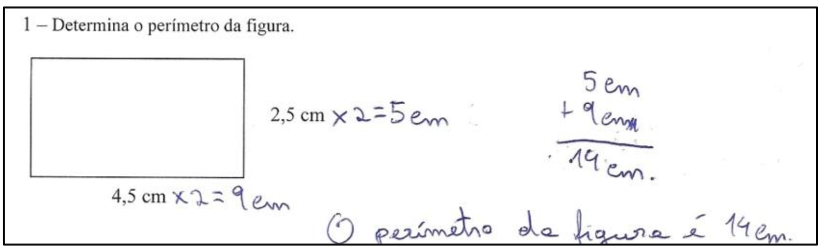
De seguida apresento a análise da resolução de tarefas relativas ao perímetro, da segunda entrevista.

Questão 1. Nesta questão, à semelhança da questão 3 do teste diagnóstico, era necessário calcular o perímetro de um retângulo. Mariana voltou a responder correta e rapidamente à questão mas iniciou a verbalização do seu raciocínio referindo-se ao significado de perímetro em vez dos cálculos a efetuar. Assim:

Mariana: O perímetro é o que está à volta por isso, vou ter de fazer todos os lados. Tenho de somar todos os lados. Como está aqui representado o comprimento e a largura vou ter de fazer essas duas coisas, cada uma, vezes dois porque o outro lado é igual.

Professora: Muito bem. (Mariana começa a escrever a sua resposta). Podes usar a calculadora, não te esqueças.

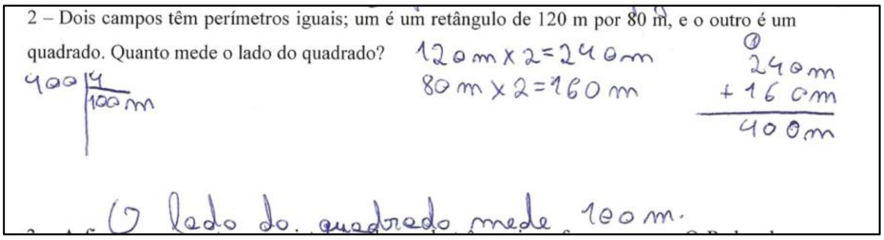
Mariana: Agora vou ter de somar os cinco centímetros e os nove centímetros porque o dois é também deste lado e deste (apontando para os dois lados correspondentes, cada um, às bases do retângulo) … Isto deu catorze centímetros.



E2 – Q1

Questão 2. Esta questão requeria que a aluna descobrisse o comprimento do lado de um quadrado sabendo que o perímetro era igual ao de um retângulo de 120 m por 80 m. Mariana respondeu à tarefa sem dificuldades, indicando todos os cálculos e explicando o seu raciocínio.

> **Mariana:** Hã…ah tenho de ver, o quadrado tem todos os lados iguais, por isso, primeiro vou ter de ver qual é o perímetro do retângulo, ao todo, que é para depois conseguir dividir por quatro, que são os quatro lados do quadrado, que me vai dar o, hã…o … pronto, o perímetro dum lado do quadrado.
>
> **Professora:** Comprimento dum lado do quadrado, é isso que queres dizer?
>
> **Mariana:** Hum hum.
>
> **Professora:** Dividiste por quatro porque?
>
> **Mariana:** Porque o quadrado tem quatro lados iguais.

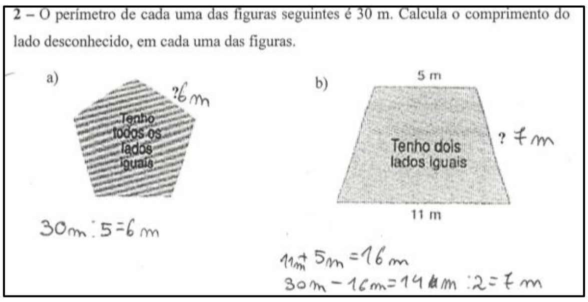

2 – Dois campos têm perímetros iguais; um é um retângulo de 120 m por 80 m, e o outro é um quadrado. Quanto mede o lado do quadrado?

120 m x 2 = 240 m
80 m x 2 = 160 m
240 m + 160 m = 400 m
400 : 4 = 100 m
O lado do quadrado mede 100 m.

E2 – Q2

Mariana reconheceu facilmente que o quadrado tinha todos os lados iguais e que para obter o comprimento do lado poderia dividir o perímetro por quatro.

Questão 2 do teste final. Esta questão pedia aos alunos que determinassem o comprimento do lado desconhecido dado o perímetro. Mariana, como seria de esperar, respondeu acertadamente, com a indicação do seu raciocínio/cálculos e unidades de medida.


2 – O perímetro de cada uma das figuras seguintes é 30 m. Calcula o comprimento do lado desconhecido, em cada uma das figuras.

TF – Q2

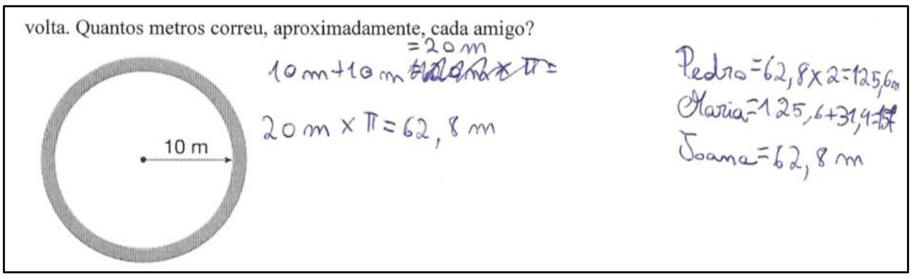
Questão 3. Esta questão requeria a determinação do perímetro de uma pista circular, visto ser necessário descobrir o número de metros que alguns amigos corriam à volta da pista. Mariana identificou, de imediato, que era necessário determinar o perímetro, revelando uma compreensão desta medida independentemente da forma da figura. Isto revela que a sua noção de perímetro não se limita à soma de todos os lados de uma figura.

Mariana: Primeiro tenho de descobrir… O perímetro desse círculo e para descobrirmos o perímetro temos de fazer o diâmetro vezes o pi e como só está apresentado o raio, tenho de fazer o raio vezes dois porque deve ser dois raios que vai dar o diâmetro, que é igual a vinte metros. (Após registar este cálculo). Agora vou ter de fazer vezes o pi, que é um valor aproximado de três ponto catorze.

Professora: Muito bem.

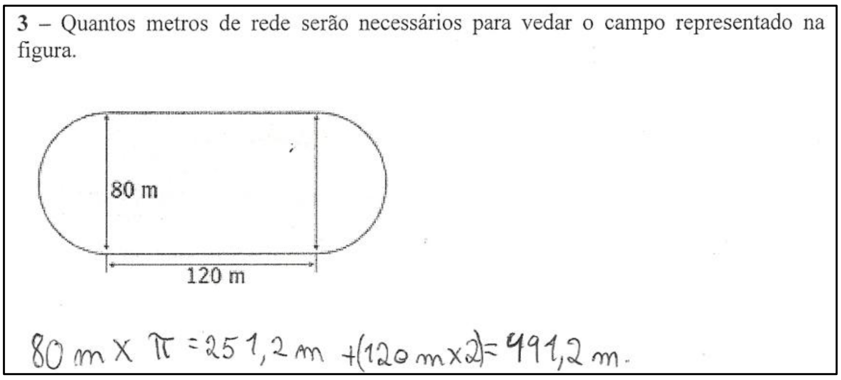
Mariana: É igual a sessenta e dois vírgula oito metros. Agora tenho de, tenho de ver, um de cada vez porque a pergunta, pergunta, cada amigo, não é no total, por isso vou ter de fazer um de cada vez.

Mariana aplicou corretamente e sem dúvidas a fórmula do perímetro do círculo e resolveu o problema sem dificuldades. Também percebeu que a distância percorrida pelos amigos era proporcional ao número de voltas e fez corretamente os cálculos necessários para responder à questão:



E2 – Q3

Também na questão 3 do teste final Mariana determinou, sem dificuldades, o perímetro da figura, envolvendo o perímetro do círculo, quando não era diretamente solicitado. Mesmo não fazendo os cálculos separadamente, é possível verificar que compreendeu a noção de perímetro conseguindo expor o seu raciocínio, como se verifica na sua resposta:


3 – Quantos metros de rede serão necessários para vedar o campo representado na figura.

80 m x π = 251,2 m +(120 m x 2) = 491,2 m.

TF – Q3

Síntese. Mariana revela compreensão do significado de perímetro, na medida em que consegue determinar o perímetro de várias figuras, poligonais ou não, mesmo quando a questão não o solicita diretamente. Indica corretamente as unidades de medida e consegue determinar o comprimento de lados desconhecidos, quando é indicado o perímetro do polígono. De acordo com os níveis de sofisticação de desenvolvimento do raciocínio de Battista (2006), poder-se-á inferir que Mariana usa um raciocínio mensurável, no estádio de desenvolvimento mais avançado, na medida em que consegue operar com medidas numéricas e abstrair-se do atributo a medir bem como abstrair-se da repetição de unidades (Battista, 2007).

Área

Seguidamente apresento a análise do desempenho de Mariana na realização de tarefas relacionadas com a noção de área, depois da unidade de ensino.

Questão 6. Esta questão pedia para determinar área de uma figura inserida em papel ponteado. Mariana já não tentou usar uma fórmula para determinar a área da figura e contou as quadrículas que conseguia distinguir na figura.

Mariana: Aqui está a dizer que um quadradinho que equivale, assim a um quadradinho, tem um centímetro cúbico, por isso.

Professora: Cúbico?

Mariana: Ai, quadrado. Por isso vou ter de fazer, imaginar que cada destes quatro pontos fazem um quadrado e depois vou ter de contar esses tais quadradinhos todos e vou ver quantos centímetros quadrados tenho.

Professora: Hum hum.

Mariana: Tem dezasseis centímetros quadrados.

Professora: Então podes escrever. Porque é que é centímetros quadrados?

Mariana: Porque aqui está a, porque os centímetros quadrados é quando vemos a área.

Professora: Porque se chama quadrado?

Mariana: Quadrado porque, para nós vermos a área é com quadrados. Quando nós compramos uma casa temos sempre de saber quanto tem, quantos metros quadrados tem.

Apesar de se enganar na leitura da unidade de medida (centímetros quadrados), Mariana já não associa a área a uma fórmula memorizada e explica que a área implica o preenchimento da figura com quadrados. Também consegue aplicar o seu conhecimento a situações do quotidiano, atribuindo significado ao conceito de área. Consegue associar a área encontrada à unidade de medida pretendida.

Questão 7. Esta questão pede diretamente o cálculo da área de um círculo, sendo dada a medida do raio. Mariana aplicou a fórmula, que usou como um facto adquirido e determinou a área sem dificuldades, mesmo não havendo qualquer figura representada:

7 – Calcula a área de um círculo com 5 cm de raio.

$5 cm \times 5 cm \times \pi = 78,5 cm^2$

E2 – Q7

Mariana: Para sabermos a área de um círculo, temos de fazer o raio vezes o raio vezes o pi, por isso, se tem cinco centímetros de raio temos de fazer vezes cinco centímetros, que é o outro raio, vezes o pi.

Professora: Muito bem!

Mariana: Igual a setenta e oito, vírgula cinco.

Professora: Terminou?

Mariana: Terminou. Esta pergunta sim.

Professora: Então setenta e oito, vírgula, cinco quê?

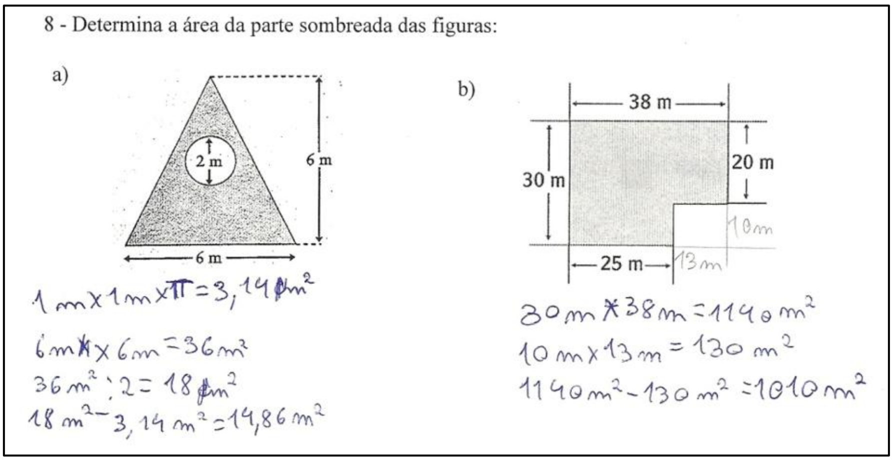
Mariana: Ah! Centímetros quadrados.

Professora: Porquê centímetros quadrados e não centímetros, se o raio é em centímetros?

Mariana: Porque centímetros quadrados é o que está por dentro.

Mesmo não indicando de imediato a unidade de medida, Mariana distingue os centímetros usados na fórmula, referentes ao comprimento do raio, dos centímetros quadrados (unidade de medida da área), explicando, de modo correto, que a unidade que usa se refere à parte interior da figura, o que revela uma compreensão do conceito de área, independentemente do uso de uma fórmula.

Questão 8. Esta questão implicava o cálculo de áreas por decomposição e, uma vez mais, Mariana, com bastante destreza, fez todos os cálculos necessários, explicando-os e usando corretamente as unidades de medida.



E2 – Q8

Na alínea a), apesar de se referir ao círculo como "uma bola", Mariana distingue o raio do diâmetro, por ser essa a medida que necessita para determinar a área do círculo.

Mariana: Agora, primeiro vou ter de fazer a A, por isso está aqui um triângulo, só que tem uma bola. Primeiro vou ter da saber a área dessa bola que é para depois fazer, que é para depois manter aqui, fazer a área do triângulo e retirar a área da bola.

Professora: Do círculo, é isso que queres dizer?

Mariana: Sim, círculo.

Professora: Não é uma bola. (Risos) OK. Podes fazer.

Mariana: Se tem dois metros de diâmetro tenho de dividir por um, que é igual a um metro de raio.

Professora: Dividir por um não, dividir por dois. É isso que queres dizer?

Mariana: Sim, sim. Um vezes um igual a um, vezes três vírgula catorze é igual a três, vírgula catorze de área.

Professora: Três vírgula catorze quê?

Mariana: Centímetros quadrados.

Professora: Centímetros? Porquê centímetros?

Mariana: Ai, metros.

Tal como na questão anterior, Mariana aplica a fórmula para determinar a área do círculo e indica a unidade de medida em centímetros quadrados, por engano, continuando a usar unidades quadradas para representar áreas. Ainda nesta alínea, relaciona a área do triângulo com a do retângulo, servindo-se dessa relação para determinar a área do triângulo, revelando uma aprendizagem da área do triângulo com compreensão e não apenas como o uso de uma fórmula previamente memorizada.

Mariana: Agora vou ter de fazer a área do triângulo. Para fazer a área de um triângulo tenho de fazer a base vezes a altura, que é seis metros vezes seis metros e depois tenho de dividir por dois.

Professora: Porque é que divides por dois?

Mariana: Porque esta coisa aqui faz como se fosse um retângulo e um retângulo ou um quadrado, neste caso é um quadrado, cabe lá dois triângulos e este é um deles.

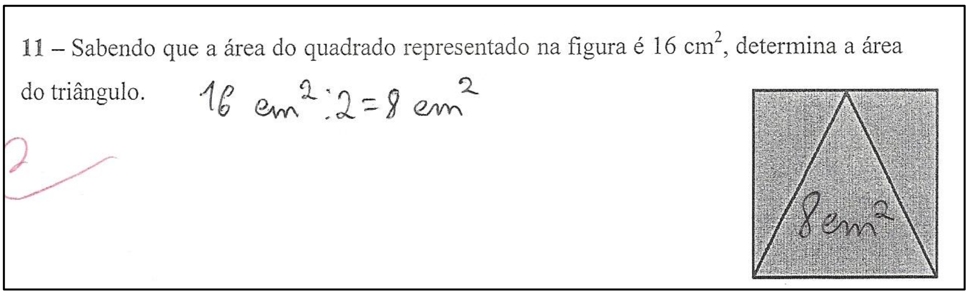
Professora: Muito bem!

Mariana: Agora tenho de fazer trinta e seis metros quadrados a dividir por dois. É igual a dezoito.

Professora: Ui, centímetros?

Mariana: Ai, meus Deus. Agora vou ter de tirar a este dezoito, este valor aqui, que é, temos de tirar a área deste círculo.

Mariana volta a enganar-se na unidade de medida, mas reconhece o engano e conclui esta tarefa com êxito e sem dificuldades. Também no teste final Mariana se serve da relação entre a área do retângulo e do triângulo para resolver a questão 11. A compreensão em detrimento da memorização está patente na sua estratégia de resolução desta questão.


11 – Sabendo que a área do quadrado representado na figura é 16 cm^2, determina a área do triângulo.

$16 \text{ cm}^2 : 2 = 8 \text{ cm}^2$

TF – Q11

Voltando à análise da questão 8 da segunda entrevista, na alínea b), Mariana optou por decompor a figura, considerando um retângulo grande ao qual retirou um canto com forma retangular, em vez de partir a figura em dois ou mais retângulos. Considera, precipitadamente, a largura do retângulo em falta metade do comprimento indicado na figura. Vejamos:

Mariana: E agora vou ter de retirar esta parte. Este lado é metade destes vinte.

Professora: Porque é que achas que é metade desses vinte?

Mariana: Porque eu tive a ver que se, primeiro, se nós, ou medirmos mesmo com a régua e dividirmos ao meio esse valor vai dar este bocadinho.

Professora: E não tens outra forma, com a figura, de ter um valor logo certo, com a certeza absoluta que é esse valor?

Mariana: Tenho, se desenhar quadrados.

Professora: Mas a figura pode não estar bem desenhada. Tens de ter a certeza. Não tens forma de descobrir a certeza de quanto é que mede esse lado?… Se fosse até cá abaixo quanto é que media?

Mariana: Se fosse até cá abaixo, até aqui (apontando para a base da figura)?

Professora: Sim.

Mariana: Media trinta metros, por isso vou ter de fazer os trinta metros menos dez metros.

Professora: Menos dez?

Mariana: Que é, por causa do que falta desta parte (apontando para o lado com 20 metros).

Professora: E aí mede dez metros?

Mariana: Este bocado aqui (medida em falta) é dez metros porque, para ficar nos trinta metros, deste lado, tem, este vinte tem de ser trinta, por isso é que este lado tem de ter dez metros.

Professora: Ah! Então tem de ter dez metros porque se juntarmos dez ao vinte ficamos com os?

Mariana: Com os trinta.

Quando alertada para o seu possível erro de visualização ou medição, Mariana encontra uma forma de determinar o lado desconhecido, que acaba por usar para determinar, também, o outro comprimento em falta.

Mariana: E agora este, esta parte, se isto aqui tem vinte e cinco, é cinco metros. Ah, não.

Professora: Este lado também tem trinta?

Mariana: Não, é trinta e oito por isso, cinco é para trinta, mais oito, é igual a, é igual a treze, por isso aqui tem treze.

Professora: Ah, assim está melhor.

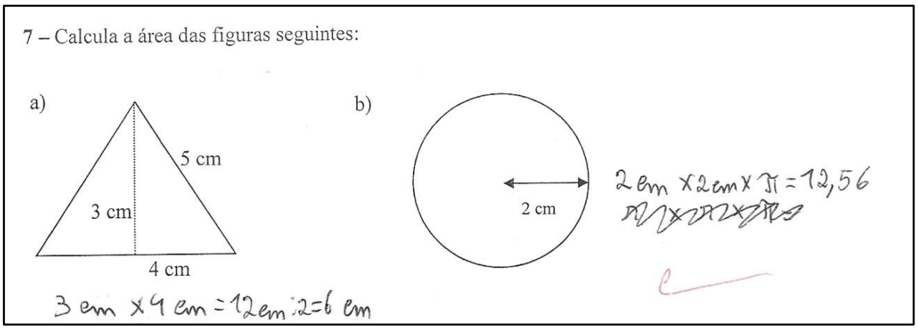
Mariana: Dez mais, ai, dez vezes o treze é igual a cento e trinta. Agora vou ter de tirar ao mil, cento e quarenta os cento e trinta, que é igual a mil e dez.

Professora: Muito bem!

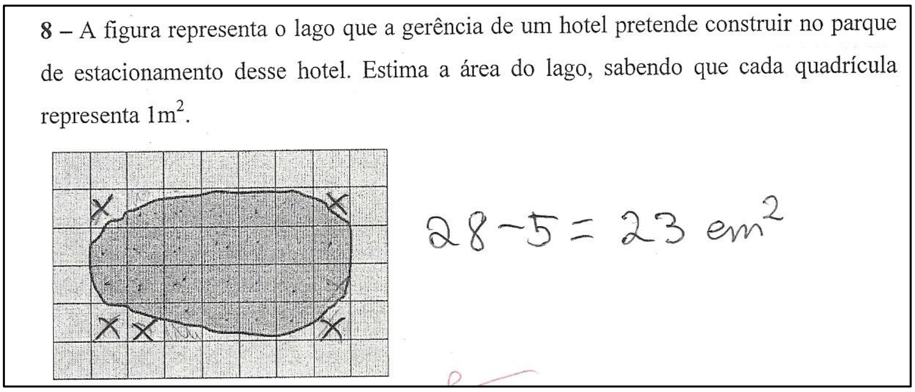
Mariana: A área desta parte aqui é mil e dez metros quadrados.

Nesta situação Mariana já não confunde centímetros quadrados com metros quadrados e faz os cálculos, indicando as unidades de medida corretas. Ao subtrair a área do retângulo em falta ao retângulo grande, usa unidades de área em vez de comprimento, significando que consegue distinguir com clareza o trabalho com comprimentos do trabalho com áreas.

Mariana revela destreza no cálculo de áreas, quer as figuras tenham indicação do comprimento dos lados, quer sejam preenchidas com quadrículas, como também se pode comprovar nas suas respostas das questões 7 e 8 do teste final. Apesar de se ter enganado nas unidades de medida de área na questão 7 e de na questão 8, tal como na segunda entrevista, confundir centímetros quadrados com metros quadrados, este erro pode indiciar o hábito do uso desta unidade de medida nos exercícios e situações problemáticas.



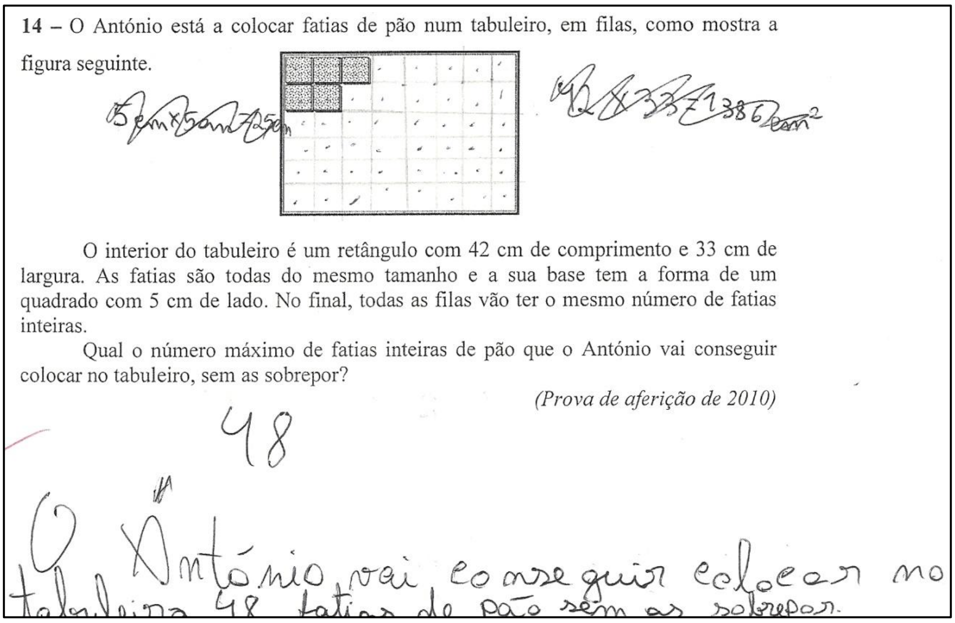
TF – Q7



TF – Q8

No teste final, Mariana não foi tão cuidadosa com a utilização das unidades de medida mas a situação formal de avaliação pode ter provocado algum nervosismo e ansiedade, para além de não poder verbalizar o seu raciocínio.

Questão 14 do teste final. Mariana desiste de aplicar a fórmula da área do retângulo, percebendo que essa estratégia não a leva à solução pretendida e resolve o problema socorrendo-se da estratégia de preencher a figura com quadrículas, como a própria imagem da questão sugere. A compreensão de área dissociada do uso de uma fórmula memorizada está, mais uma vez, presente na sua resposta.



14 – O António está a colocar fatias de pão num tabuleiro, em filas, como mostra a figura seguinte.

5cm x 5cm = 25cm

42 x 33 = 1386 cm²

O interior do tabuleiro é um retângulo com 42 cm de comprimento e 33 cm de largura. As fatias são todas do mesmo tamanho e a sua base tem a forma de um quadrado com 5 cm de lado. No final, todas as filas vão ter o mesmo número de fatias inteiras.

Qual o número máximo de fatias inteiras de pão que o António vai conseguir colocar no tabuleiro, sem as sobrepor?

(Prova de aferição de 2010)

48

O António vai conseguir colocar no tabuleiro 48 fatias de pão sem as sobrepor.

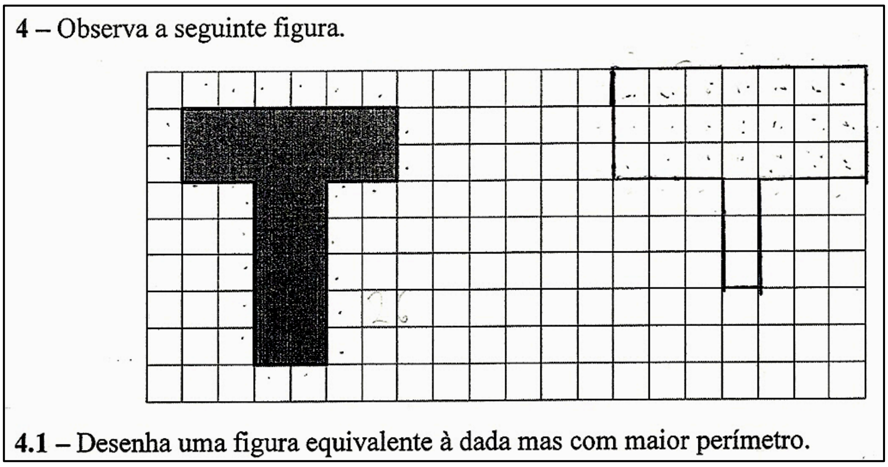
TF – Q14

Síntese. A aluna, apesar de nem sempre indicar a unidade de medida correta, trocando metros quadrados por centímetros quadrados, consegue determinar áreas de várias figuras, mesmo o triângulo e o círculo, e em várias situações, com bastante destreza e indicando todos os cálculos efetuados. Usa fórmulas com compreensão e aplica o conceito de área em situações onde não é possível utilizar fórmulas. Já faz a leitura correta das unidades de área do sistema métrico e continua a distinguir unidades de comprimento de unidades de área, usando-as corretamente. Possui uma estrutura multiplicativa (Outhred & Mithelmore, 2000), que a leva a compreender as fórmulas da área. De acordo com Battista (2007), a aluna detém uma compreensão genuína de área uma vez que revelou compreender: (i) o atributo a medir e respetivo comportamento, (ii) como a área é medida com unidades de área, (iii) como o processo numérico pode ser usado para determinar a área para formas especiais, como o triângulo e o círculo, e (iv) como estes processos são representados verbal e algebricamente.

Distinção entre perímetro e área

Por último faço uma análise do desempenho de Mariana no que respeita à distinção entre área e perímetro, em questões que envolvem os dois conceitos, nomeadamente a equivalência e congruência de figuras planas.

Questão 4. Esta questão, à semelhança da questão 4.1 do teste final, solicitava a construção de uma figura equivalente à dada mas com diferente perímetro. No teste final Mariana não responde corretamente à questão, desenhando uma figura com igual perímetro (medida que determina na figura da questão) e maior área.



TF – Q4.1

Apesar de distinguir as duas grandezas, Mariana julga figuras equivalentes como tendo o mesmo perímetro em vez da mesma área mas, na segunda entrevista, questão 4, já se refere a figuras equivalentes com tendo a mesma área:

Mariana: Aqui vou ter de desenhar uma figura com menor perímetro mas equivalente.

Professora: O que é que quer dizer equivalente?

Mariana: Com a mesma área. Por isso, primeiro vou ter de contar a área e o perímetro que é para depois conseguir fazer uma figura. (Mariana começa por contar as quadrículas do interior da figura uma a uma, entretanto arrepende-se e conta apenas as quadrículas da base e da altura do retângulo maior). Vou fazer seis vezes sete e depois vou retirar seis, que é este bocadinho aqui (apontando para o retângulo a branco no interior do retângulo grande).

Professora: Mas inicialmente estavas a fazer de outra maneira e arrependeste-te?

Mariana: Sim, porque ia demorar muito tempo.

Professora: Como é que estavas a fazer da primeira vez?

Mariana: Estava a contar um quadradinho de cada vez.

Professora: E então optaste por fazer…

Mariana: Uma conta de vezes e depois tirar…

Professora: Porquê?

Mariana: Porque para nós sabermos a área de uma fi…, de um quadrado ou de um retângulo ou de outra figura podemos fazer a parte de cima, as colunas, vezes as filas.

Neste excerto da entrevista, Mariana revela compreender a estrutura fila por coluna, implícita na área do retângulo, reconhecendo a sua importância e utilidade e já não utiliza as unidades de medida do sistema métrico. Também usa métodos de contagem mais rápidos do que a contagem unidade por unidade, associados à fórmula do perímetro do retângulo:

Mariana: Ah, não, trinta e seis. Depois tenho de fazer o perímetro.

Professora: Então esse trinta e seis é o valor do quê?

Mariana: Da área.

Professora: Da área.

Mariana: Da parte escura. Agora o perímetro é estes riscos por isso vou ter de contar. (Mariana conta um a um os tracinhos à volta do retângulo grande e baralha-se).

Professora: Já te baralhaste. Estás a contar novamente um a um.

Mariana: Hum hum.

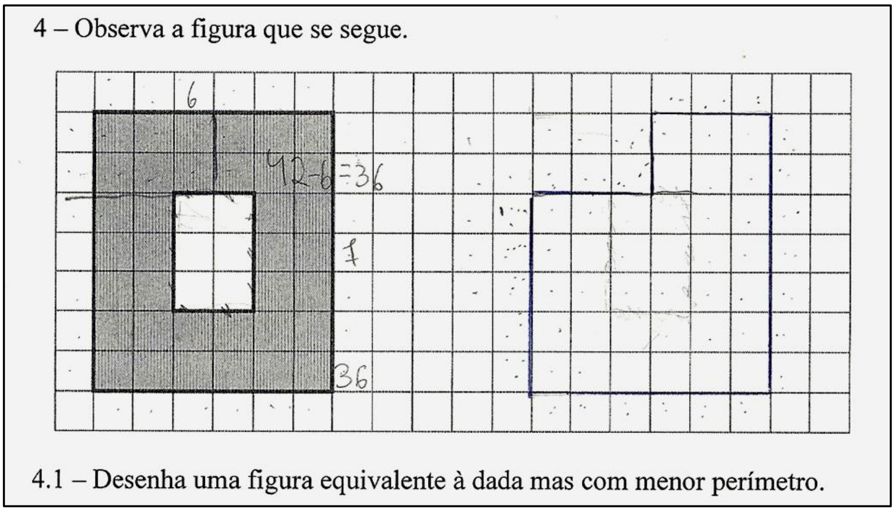
Professora: Então não arranjas uma forma mais fácil?

Mariana: Posso fazer seis mais seis, que é igual a doze, mais sete, que é igual a dezanove, mais sete que é igual a dezasseis.

Professora: Dezasseis? Dezanove mais sete é dezasseis?

Mariana: Ai não, vinte, vinte e seis. Depois posso fazer mais quatro, que é destes dois, que é igual a trinta mais outros seis, que é destes aqui, que é trinta e seis. Tem trinta e seis de perímetro. Por isso vou ter de fazer uma figura com trinta e seis de área mas com menos de perímetro. (Mariana começa a contar quadrículas) Agora vou ter de ver um perímetro que seja pequeno mas com uma área grande. Posso fazer uma figura parecida a esta com a mesma área mas com menos perímetro. Por isso posso tirar este perímetro aqui (apontando o retângulo do centro) … posso, encolher, digamos, este para aqui e fica assim. Tiro estes dois aqui do perímetro.

Apesar dos enganos implícitos no cálculo mental, a aluna encontra uma forma de desenhar uma figura equivalente com menor perímetro. Ao reconhecer essa possibilidade também mostra que consegue distinguir com clareza as duas grandezas.



E2 – Q4

Professora: Tens a mesma área?

Mariana: Tenho porque estes seis aqui ocuparam estes seis que faltavam.

Professora: Então e agora o perímetro?

Mariana: O perímetro ficou mais pequeno porque tirei este perímetro aqui (do centro) e retirei este aqui (do canto).

Professora: Este bocado se movimentasses este traço para cima e este para a esquerda, que figura obtinhas?

Mariana: Um retângulo.

Professora: Alteraste, alteraste o comprimento?

Mariana: Não.

Professora: Não.

Mariana: Por isso continua igual.

Professora: Continua igual. Acabaste por tirar só o que estava no meio. Sim?

Mariana: Sim.

Mariana necessitou de alguma ajuda para se abstrair das suas construções mentais que não correspondiam às construções geométricas corretas pois não tinham as medidas necessárias. No entanto, juntando as suas ideias com as minhas sugestões, conseguiu construir a figura pretendida e comprovou que tinha as medidas requeridas.

Questão 5. Nesta questão a aluna tinha de indicar e justificar se existiam figuras congruentes. Mariana não se justificou corretamente, do ponto vista formal mas referiu-se à forma, área e perímetro iguais que as figuras tinham de ter, bastando olhar para as figuras para reconhecer se existia congruência ou não:

Mariana: Primeiro vou ter de ver a área das figuras e, que é para ver se alguma tem a mesma área e se alguma delas tiver a mesma área é porque é congruente.

Professora: Tens a certeza?

Mariana: Tenho de fazer a área mais o perímetro. Não.

Professora: O que são figuras congruentes?

Mariana: É… Iguais.

Professora: E equivalentes?

Mariana: Equivalentes é com o mesmo valor de área.

Professora: E congruentes?

Mariana: Congruentes tem de ser de perímetro. Então vou ter de fazer o perímetro.

Professora: Só assim?

Mariana: Tenho de ver o perímetro de cada uma e a seguir ver a área.

Professora: Às vezes podem ter a mesma área e o mesmo perímetro e não serem congruentes. O que é que têm que ter para serem congruentes? (Após um momento de silêncio). O que é que tem de acontecer às figuras?

Mariana: Têm de ser iguais.

Professora: Têm que ser iguais. Têm que ter o quê?

Mariana: A mesma forma.

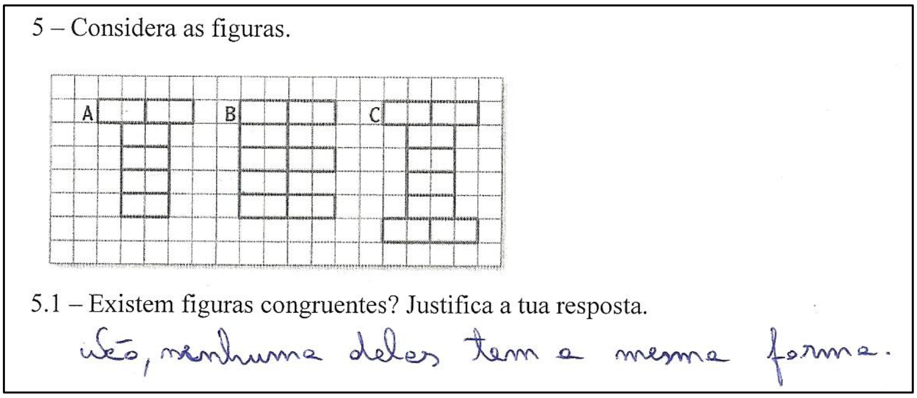
Professora: Para serem iguais têm que ter a mesma forma. Achas que precisas de contar alguma coisa aí?

Mariana: Não.

Professora: Então? Existem figuras congruentes? Sim ou não?

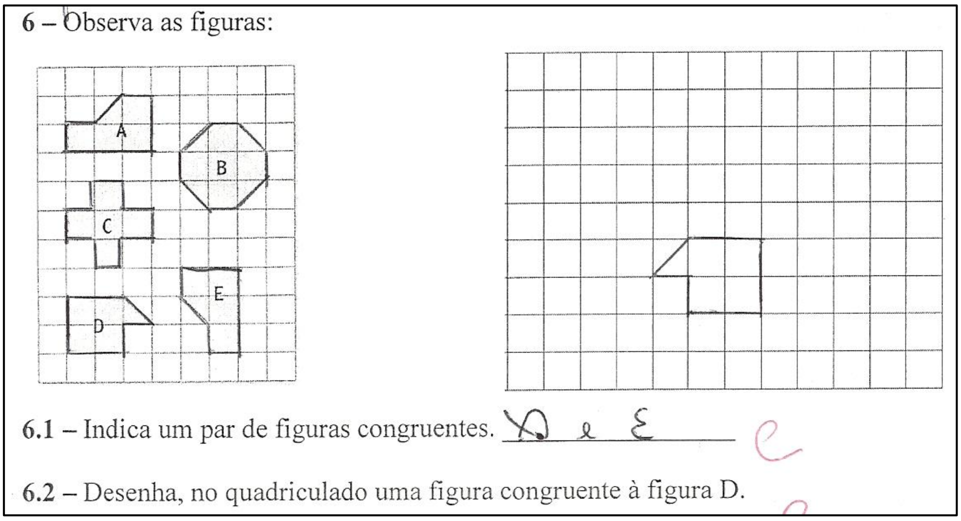
Mariana: Não.

O facto de Mariana se referir a figuras congruentes como iguais e com a mesma forma já implica que, visualmente, as consegue reconhecer, mesmo sem enunciar uma definição formalmente correta.



E2 – Q5.1

Para reforçar a ideia de que a aluna reconhece e constrói figuras congruentes apresento a sua resposta à questão 6 do teste final:



TF – Q6

Questão 9. Nesta questão a aluna tinha de determinar o perímetro de um quadrado sabendo a sua área. O trabalho em simultâneo das duas medidas permitiu verificar, uma vez mais, que Mariana as distingue e determina o seu valor sem dificuldades.

9 – Se uma sala quadrangular tem 25 m^2 de área, qual o seu perímetro?

$5m \times 5m = 25m^2$

$5m \times 4 = 20m$

O seu perímetro é 20m.

E2 – Q9

Mariana: Uma figura quadrangular quer dizer que é um quadrado. Se é um quadrado tem de ter todos os lados iguais e por isso tenho de fazer a ár.., o comprimento vezes a área, mas como é igual.

Professora: Comprimento vezes a área?

Mariana: Um lado vezes o outro, e como é igual, é só ir à tabuada onde o vinte e cinco está presente que é a tabuada do cinco, por isso temos de fazer cinco vezes cinco que é igual ao vinte e cinco. Mas nós queremos saber os quatro lados por isso temos de fazer o cinco, que é só um lado, vezes quatro, que é igual a vinte centímetros de perímetro.

Professora: Excelente! Podes escrever. Tudo como tu pensaste. Muito bem “Mariana”.

Mariana: O seu perímetro…

Professora: Vinte centímetros?

Mariana: Ai…

Professora: É o hábito dos centímetros, não é?

Mariana: A professora tem de fazer exercícios que não levem centímetros.

Professora: Este não leva.

Mariana: Mas muitas vezes.

Mariana explicou a forma como pensou com bastante clareza, indicando todos os cálculos necessários e reconheceu o hábito de usar centímetros/centímetros quadrados, sugerindo o uso de outras unidades de medida com maior frequência, com vista à redução deste engano.

Síntese. Mariana revela um bom desempenho no que diz respeito à distinção entre perímetro e área. Mostra reconhecer a existência de figuras equivalentes e congruentes, prevendo que figuras com a mesma área podem ter perímetros diferentes ou iguais e figuras com o mesmo perímetro, diferente área. Identifica e desenha figuras congruentes, não necessariamente na mesma posição. Já reconhece que área e perímetro são grandezas distintas porque correspondem a medidas distintas e não por se determinarem de modos diferentes, evocando fórmulas ou o número de medidas necessárias para o seu cálculo, como referiu no teste diagnóstico.

6.1.5. Síntese global

De um modo geral, Mariana apresenta grande empenho e motivação no trabalho que desenvolve, explicando-se muito bem e indicando todos os cálculos, que muitas vezes faz mentalmente. Foi notória a sua persistência e perspicácia na resolução das tarefas propostas, onde se pôde destacar o seu raciocínio lógico e abstrato e a sua capacidade de resolução de problemas. Antes da unidade de ensino, no que diz respeito ao perímetro, a aluna mostra já uma boa compreensão deste conceito, aplicando as aprendizagens ocorridas no 1.º ciclo nas tarefas do teste diagnóstico. Consegue determinar o perímetro de várias figuras, quer tenham indicado a medida de todos os lados ou não, mas ainda se foca nas unidades de comprimento do sistema métrico, mesmo quando não é suposto usá-las. Tem dificuldade em desenhar uma figura, dado o seu perímetro, sem unidade de comprimento especificada. Revela dificuldade a determinar o perímetro em tarefas cuja figura não está representada.

Durante a unidade de ensino, Mariana continua a mostrar-se à vontade nas tarefas relativas ao estudo do perímetro, evitando o uso de unidades de medida do sistema métrico em situações onde a unidade de medida não é especificada. Indica sempre corretamente a unidade de medida do perímetro e também consegue relacionar o perímetro com a dimensão da unidade de medida, compreendendo, deste modo, a relação inversa existente entre a unidade de medida e o perímetro, ou seja, quanto maior a unidade de medida, menor o perímetro. No que respeita ao perímetro do círculo, também relaciona corretamente o diâmetro com o perímetro do círculo, indicando corretamente um valor aproximado de π, mesmo quando este não é indicado no enunciado da tarefa.

Após a unidade de ensino, Mariana mostra-se ainda mais confiante na determinação de perímetros e revela uma ótima compreensão do seu significado, calculando o perímetro de polígonos e não polígonos, como o círculo, quer diretamente, quer em situações que envolvem a resolução de problemas. Aplica corretamente as unidades de medida, do sistema métrico ou não. Na segunda entrevista revela que a tarefa que mais gostou de resolver foi a relativa à descoberta do π, com o Geogebra, referindo-se à importância desta constante na determinação do perímetro e área do círculo. Também refere não sentir dificuldades porque, para ela, o perímetro é só contar o que está à volta e não é muito difícil. Refere que a única coisa que pode correr mal é ter de voltar a contar "tracinhos".

Quanto à área, antes da unidade de ensino, Mariana foca-se muito na fórmula da área do retângulo, uma fórmula que memorizou e usa para responder a grande parte das questões do teste diagnóstico. Também revela dificuldade em desenhar uma figura com determinada área, e na sua tentativa desenha um retângulo, talvez por ser a figura mais trabalhada no 1.º ciclo. Revela dificuldade em determinar a área do triângulo, mesmo preenchido com quadrículas e não faz a leitura correta das unidades de medida, mesmo do sistema métrico. Continua a usar unicamente unidades do sistema métrico, não reconhecendo a expressão "unidades quadradas".

Durante a unidade de ensino. Mariana vai superando as suas dificuldades a alargando a sua noção de área, para além da fórmula da área do retângulo, pois reconhece que não funciona para todas as figuras. Já faz referência à contagem de quadrículas do interior das figuras como uma forma de obter a área de qualquer figura. Também determina a área do triângulo, relacionando-a com a do retângulo e consegue determinar a área de polígonos inseridos em papel quadriculado sem indicar a unidade de medida do sistema métrico. Nas tarefas relacionadas com a área do círculo, teve um bom desempenho, estabelecendo relações entre os elementos do círculo e as suas medidas, bem como as variáveis envolvidas na fórmula explorada nas tarefas.

Após a unidade de ensino, Mariana determina, com destreza, a área de várias figuras, mesmo o triângulo e o círculo, e em várias situações e indicando todos os cálculos efetuados. Usa as fórmulas exploradas a aprendidas com compreensão e também consegue determinar áreas sem recorrer diretamente a fórmulas. Faz a leitura correta das unidades de área do sistema métrico e distingue unidades de comprimento de unidades de área, usando-as, quase sempre, corretamente. Pode dizer-se que tem todos os requisitos que lhe permitem compreender genuinamente o e usar corretamente o conceito de área. Na última entrevista revela não sentir dificuldades no que diz respeito à área, referindo-se à contagem dos quadradinhos ou à facilidade de usar as fórmulas, recorrer às operações, para determinar a área de figuras, distinguindo bem a fórmula do perímetro do círculo da fórmula da área do círculo, o que poderá estar relacionado com as tarefas de caráter exploratório que realizou ao longo da unidade de ensino. Nesta entrevista, a tarefa que mais gostou de resolver foi a que envolvia a área do círculo e do triângulo, por ser necessário efetuar mais cálculos e envolver π, número que revela gostar muito.

No que respeita à distinção entre área e perímetro, antes da unidade de ensino, Mariana já faz uma clara distinção entre as duas grandezas e reconhece que figuras com a mesma área podem ter perímetros diferentes, embora não consiga explicar com clareza e formalmente o motivo dessa distinção. Aplica fórmulas para calcular o perímetro e a área, particularmente do retângulo, e faz a indicação correta das unidades de medida do sistema métrico, correspondentes. Durante a unidade de ensino vai melhorando e formalizando as suas ideias no que concerne a este dois conceitos e já identifica figuras equivalentes e congruentes, revelando conhecer e aplicar as noções de equivalência e congruência de figuras planas. Após a unidade de ensino, ainda melhora o seu desempenho, reconhecendo que área e perímetro são grandezas distintas porque correspondem a medidas distintas e não porque se determinam de modos diferentes. Compreende e aplica os conhecimentos relativos à equivalência e congruência de figuras planas, embora, do ponto de vista conceptual não se mostre muito à vontade. De qualquer modo, revela uma boa evolução ao nível dos conceitos e melhora bastante a sua ideia em relação à área e perímetro de figuras diferentes do retângulo. Mostra bastante à vontade e destreza no trabalho envolvendo estes conceitos geométricos.

6.2. O caso de João

6.2.1. Apresentação

João tem 10 anos e é uma criança simpática, bem-disposta, empenhada e participativa. Gosta de aprender e exprime-se muito bem mas nem sempre o seu desempenho corresponde às expetativas. É um aluno de nível médio que transitou sempre de ano e no 1.º ciclo esteve sempre na mesma escola. Vive com os pais e o irmão mais novo. Refere que o seu percurso relativamente à Matemática foi mais ou menos porque, apesar de gostar, considera-a um bocadinho difícil, pelo que prefere Estudo do Meio, onde os resultados são melhores. O que gosta mais na Matemática é o facto de ir evoluindo, percebendo cada vez mais e melhor os assuntos trabalhados no 1.º ciclo. Considera-se um aluno médio a Matemática, porque não é fraco nem muito bom, e tem vindo a melhorar os seus resultados e acha que podia ser melhor se fizesse sempre os trabalhos de casa estivesse mais atento nas aulas e nos testes. Gosta de desafios e sente-se bem perante novas tarefas porque proporcionam novas oportunidades de aprendizagem. As suas tarefas preferidas são as que envolvem exploração de PowerPoint e jogos.

Nas aulas, João gosta mais de trabalhar em grupo porque "são mais cabeças a pensar" e o resultado pode ser mais positivo, devido à entreajuda. Nas discussões das tarefas considera que os colegas, às vezes, respondem à toa, sem pensar e de modo desorganizado, mas acha importante que se discutam resultados para ver as ideias dos outros e corrigir-se ou aprender com os erros dos colegas. Relativamente ao estudo dos perímetros e áreas, considera este assunto um pouco mais difícil e confuso que outros e refere que o perímetro é mais fácil de contar do que a área. Considera a área mais difícil que o perímetro.

6.2.2. Compreensão de perímetro e área antes da unidade de ensino

Perímetro

Vejamos o desempenho de João na primeira entrevista num conjunto de tarefas relativas à determinação do perímetro e resolução de problemas envolvendo esta grandeza.

Questão 1. Nesta questão João só teve sucesso na determinação do perímetro da figura C. Na figura A, apresenta como resposta dezasseis centímetros, e refere que só contabilizou os lados que tinham indicado o comprimento:

João: Hã, na A contei aqui estes lados.

Professora: Quais lados?

João: Três centímetros, mais um centímetro, mais dois centímetros, mais quatro centímetros… E a outra seis. Depois…

Professora: Então e aqueles que não têm lá número?

João: Pois, esqueci-me.

Professora: Contaste-os?

João: Não.

Professora: Mas está-me a dizer que te esqueceste.

João: Pois, esqueci-me desses.

Professora: Então, como é que tu calculavas o perímetro dessa figura? Qual é que era o objetivo aqui? Era fazer o quê?

João: (Apontando) Aqui também era dois centímetros, dois centímetros, dois centímetros, ali também era dois centímetros… que dava vinte e quatro.

Professora: Que conta é que tu fizeste?

João: Então, aos dezasseis adicionei mais oito, seis, dos três lados.

João só se refere ao perímetro como a soma dos lados mas limitou-se a somar o comprimento dos lados discriminados na figura. Quando confrontado com o seu erro, diz que se esqueceu dos restantes mas, mesmo assim, voltaria a esquecer-se de dois lados (os que teriam 1 cm de comprimento). Na figura B, a sua resposta também é dada em centímetros e não corresponde ao perímetro da figura representada:

João: Na figura B?… Contei estas linhas, do perímetro e... Hã… Fiz vezes um. Dava o total. Isto aqui tinha vinte linhas, portanto vai ficar a dar os vinte centímetros.

Professora: Vinte linhas é cada tracinho?… É uma linha. E quanto é que mede cada linha?

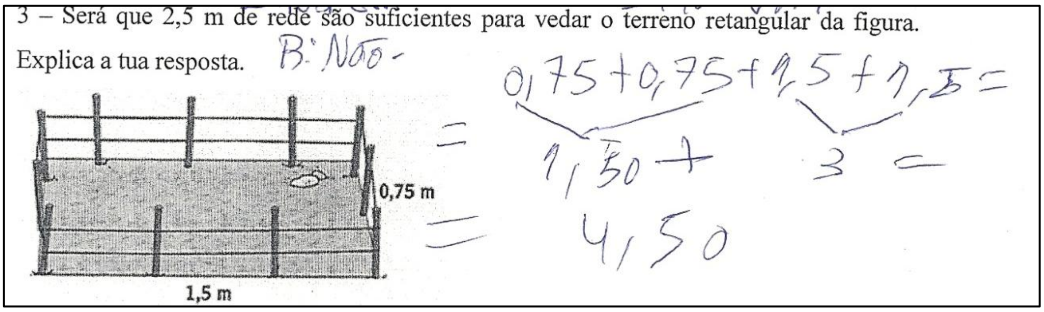
João: Um centímetro.

Professora: Hum, um centímetro? Mas está lá escrito centímetros?

João: Não, mas… Oh, é mais ou menos um centímetro.

João sabia que tinha de contabilizar os traços à volta da figura mas, provavelmente, deixou falhas porque contou apenas vinte unidades de perímetro, quando a figura tinha vinte e quatro unidades. Não repete a sua contagem, considerando-a correta e refere-se às unidades como linhas, fazendo-as corresponder a um centímetro cada uma. No que respeita à figura C, o aluno adiciona os três lados do triângulo representado na figura, indicando o resultado em centímetros, como era suposto.

Questão 2. João misturou aos resultados da questão 1 com os dados da questão 2, não se apercebendo que eram questões distintas e usa a fórmula da área do retângulo para supostamente calcular um perímetro, confundindo área com perímetro.



TD – Q3

João: Na A. Vi os dezasseis centímetros, que foi o que me tinha dado anteriormente.

Professora: O que é que estás a considerar A?

João: A, estou a considerar esta pergunta (apontando para a pergunta anterior).

Professora: Mas esta pergunta, dois, é outra pergunta!

João: Eh, pois, não percebi muito bem esta pergunta aqui.

Professora: Ok. Então pensaste só na figura de cima?

João: Sim.

Professora: E depois?

João: Depois peguei nos dezasseis centímetros e multipliquei por cinco vírgula dois que era aqui os centímetros mas como aqui isto tinha vírgulas, primeiro fiz, tirei aqui esta vírgula ao dois e só multipliquei por cinco como se não tivesse vírgula, que deu setenta. Depois fiz estes, hã, vinte, hã …que estavam na vírgula vezes dezasseis que deu trinta e dois centímetros e somei os setenta mais trinta e dois centímetros que deu cento e dois centímetros. Na B vi, peguei, nos vinte, a mesma coisa, vezes cinco vírgula dois, a mesma coisa, deu cem. Depois, estes, deu quarenta. Somei, ficou cento e quarenta centímetros, um metro e quarenta.

Professora: E porque é que foste multiplicar?

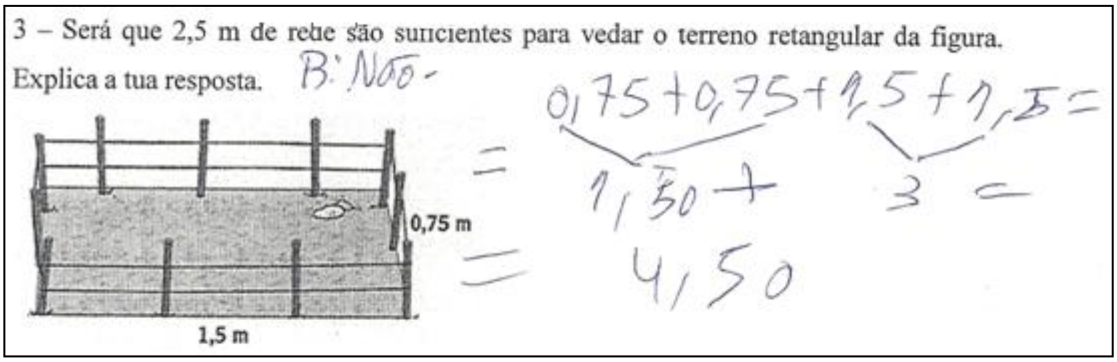
João: Porque dizia aqui o comprimento de um quadrado e achei que devia multiplicar.

Professora: Achaste que devias multiplicar porque estavas a multiplicar o comprimento do quadrado pela figura?

João: Sim.

Ao misturar as questões 1 e 2, a resposta de João fica confusa. Multiplica o perímetro da figura anterior pelo lado do quadrado, referindo que não tinha percebido muito bem a questão, que falava no comprimento do quadrado, levando-o a multiplicar os valores. Apresenta a resposta em centímetros e não faz qualquer referência à área do quadrado mas a sua ideia pode ter origem na fórmula da área desta figura.

Questão 3. Nesta questão os alunos tinham de identificar e calcular a medida do perímetro de um terreno retangular. Tal como Mariana, João conseguiu resolver corretamente a situação problemática da questão e referiu os cálculos que efetuou. Não indicou qualquer unidade de medida ao longo da sua resolução mas fez referência na entrevista, conseguindo fazer as reduções entre metros e centímetros.



TD – Q3

João: Não, porque … primeiro, esta vez não me esqueci, isto tinha setenta e cinco centímetros (apontando para o lado com a indicação 0,75 m). Este lado é igual a este.

Professora: Como é que tu chegaste à conclusão que tinha setenta e cinco centímetros?

João: Metros. Dizia ali. Zero vírgula setenta e cinco metros é setenta e cinco centímetros.

Professora: Muito bem.

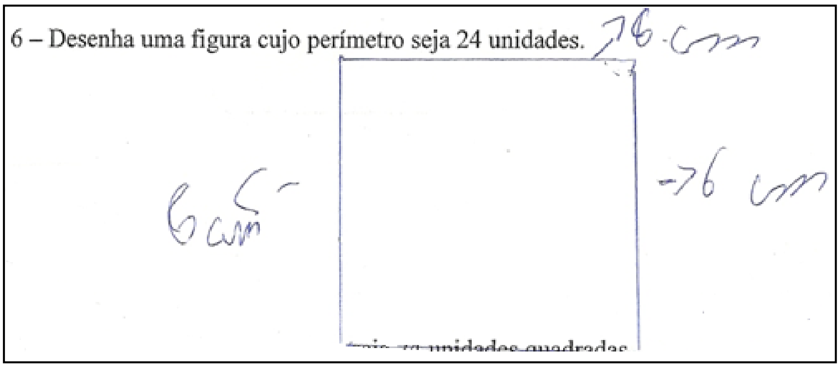
João: Portanto, como tinha dois lados igual a este fiz assim e somei.

Professora: Juntaste, é isso?

João: Juntei, que dava um metro e cinquenta. Depois a mesma coisa mas com um vírgula cinco metros que deu três metros. Depois juntei um vírgula cinquenta mais três metros que deu quatro metros e cinquenta. Hã, aqui dizia dois metros e cinquenta portanto era preciso mais dois. Portanto este tamanho de rede não dava.

João compreendeu que era necessário somar os quatro lados da figura mas não se refere ao perímetro, apesar de ser percetível que o estava a determinar pela referência que faz à questão anterior, onde indica que se esqueceu de adicionar o comprimento de alguns lados. Percebeu que os lados do retângulo eram iguais dois a dois e utilizou as medidas corretas. Determinar o perímetro do retângulo não representou qualquer dificuldade para o aluno.

Questão 6. Nesta questão, João construiu um quadrado e indicou a medida do lado como tendo 6 cm. Usou unidades de medida do sistema métrico mas o seu raciocínio estava correto.



TD – Q6

João: Esta aqui eu achei difícil porque aqui dizia vinte e quatro unidades e esta já dizia quadradas. Portanto aqui fiz quase a mesma…

Professora: Porque é que tu achas que esta era, dizia, unidades quadradas e aquela unidades?

João: Não sei.

Professora: Uma diz para tu desenhares a figura com… perímetro… de vinte e quatro e a outra diz para desenhares a…área. Tu pensas que é mesma coisa não é?

João: É.

Professora: E ficaste confundido. Então desenhaste a mesma figura nas duas?

João: Sim. E depois como fui à tabuada do seis e encontrei o vinte e quatro. Multiplicamos por quatro, portanto ficou com quatro lados. O quadrado tinha quatro lados e cada um media seis, fazíamos seis vezes quatro, dava vinte e quatro… A seis estava bem!

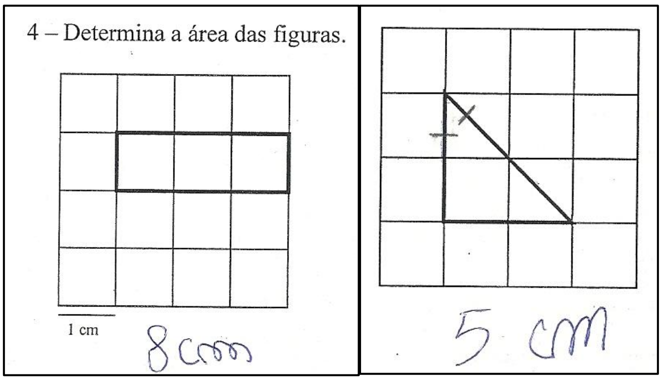
João revela confundir área e perímetro, julgando que são semelhantes e esclarece, por isso mesmo, que a sua resposta às questões 6 e 7 é a mesma. De qualquer modo, na questão 6, o aluno reparte as vinte e quatro unidades pelos quatro lados do quadrado, indicando que cada lado do quadrado que construiu tem 6 cm.

Síntese. João consegue determinar o perímetro de figuras como o triângulo ou o retângulo desde que tenham a indicação do comprimento de todos os lados ou, no caso do retângulo, o comprimento e a largura. Deixa falhas na contagem de unidades comprimento à volta das figuras e não considera o comprimento de todos os lados para determinar o perímetro de figuras poligonais. Associa a medida do perímetro à soma dos lados e usa medidas de comprimento, o que indica que tem a noção que o perímetro está relacionado com a medida à volta das figuras. Nem sempre coloca a unidade de medida e, à semelhança de Mariana, só reconhece as unidades do sistema métrico.

Área

No que diz respeito às questões relacionadas com a área, o desempenho de João não foi tão bom, especialmente na área de figuras que não o retângulo.

Questão 4. Nesta questão começa a ser visível a confusão entre perímetro e área porque João apresenta a seguinte resposta:



TD – Q4

Relativamente à primeira figura, João reconhece tratar-se de um retângulo e refere ter contado os centímetros à sua volta:

João: Hã, portanto se uma linha ou um "coisinho" (apontando) é um centímetro, tive de contar todas portanto dava um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito centímetros.

Professora: Então contaste tudo à volta?… E a pergunta pedia-te o quê?

João: A área mas, também, acho que também dava assim porque… então porque… que isto também, acho que os, os, as linhas, também, o que dão por fora também podem dar por dentro.

Professora: Então estás-me a dizer que, que a área é a mesma coisa por dentro… e por fora?

João: Mais ou menos.

Professora: Então? Explica melhor.

João: Então.

Professora: Nas outras perguntas o que é que eu te pedi?

João: … Áreas e perímetros.

Professora: Na pergunta um, na pergunta dois, eu pedia-te a medida do quê?

João: Do perímetro.

Professora: Do perímetro. E agora estou-te a pedir a medida da…

João: Área.

Professora: E fizeste da mesma forma. Foi isso? Consideraste que era igual?

João: Hum hum.

Professora: Área ou perímetro, para ti, é a mesma coisa?

João: Hã hã, sim.

Para João, perímetro e área podem ser coisas diferentes, associando ao termos dentro e fora, mas considerou que as medidas eram iguais e determinavam-se do mesmo modo. Na segunda figura, teve mais dificuldade em contar as linhas à volta porque duas delas correspondiam à diagonal das quadrículas, o que o confundiu ainda mais.

João: Teve aqui uma rasteira porque, aqui só tinha metade. Mas eu fiz aqui, aqui está uma, duas, três, quatro. Depois, isto são dois meios que faz um. Quatro mais um dá cinco.

Professora: Então considerando essa linha que está aí a dividir o quadrado ao meio, é igual ao lado?

João: Igual a este lado (apontando para a base). Que dava, como isto era metade e isto era outra metade fazia um. É estas quatro linhas mais um.

Professora: O que é que é metade? A linha é metade, a linha é metade de uma linha inteira? Estás-me a dizer que esta linha é metade desta? (apontando para a altura e diagonal de uma quadrícula, respetivamente).

João: Não, mas esta aqui tem uma coisa…

Professora: Faz lá os tracinhos à volta, da tua contagem.

João: OK. Esta aqui (altura da quadrícula) ocupava já aqui um bocado deste quadrado, igual a esta. Esta já não porque ela estava assim, em diagonal, portanto fazia metade de um quadrado, o que esta não fazia. Esta deixava um quadrado inteiro e esta já em duas metades, em metade.

Professora: Estás a falar das linhas, certo? Não é daquilo que lá está dentro?

João: … Hum

Professora: Olha lá bem para a linha.

João:… Sim.

Professora: …essa linha, estás a dizer que é metade desta (base de uma quadrícula) ou destas duas (base do triângulo da figura)?

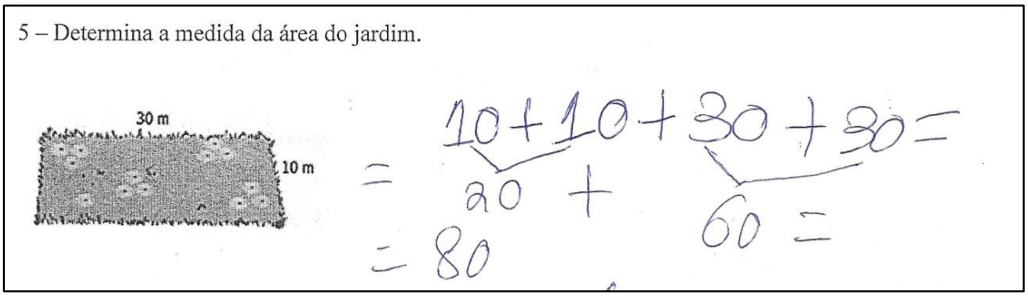
João: É metade destas duas.

Professora: Ah, metade das duas.

João: Sim.

João não estava muito certo da sua resposta e começou a contabilizar as linhas como metades por visualizar que correspondiam a metade das quadrículas. Tão depressa a altura e diagonal de uma quadrícula correspondiam a uma unidade como duas. Ao fazer nova contagem o resultado já não era o mesmo, o que ainda confundiu mais o aluno e retirou sentido à sua linha de pensamento. De qualquer modo, estava a contar as linhas à volta, tanto que apresenta o resultado em centímetros, medida de comprimento.

Questão 5. Nesta questão, claramente, João determina o perímetro em vez da área, tal como era solicitado. Explica os cálculos que fez, referindo-se ao comprimento dos lados mas não apresenta qualquer unidade de medida no seu resultado.



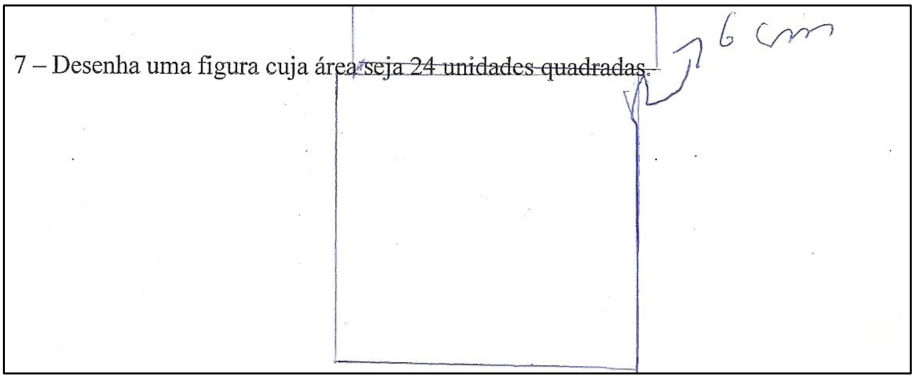
TD – Q5

João: Aqui já há a indicação que tinha este lado, lateral, tinha dez metros. Este sendo do mesmo comprimento, também media dez metros. Tínhamos de fazer dez mais dez. Dava vinte. Depois mais estes trinta, deste lado e deste lado, deu sessenta. Somei vinte com sessenta e deu oitenta.

Professora: Deu oitenta. Então a área é oitenta?

(João acenou que sim com a cabeça).

Questão 7. Nesta questão também é visível a falha na distinção entre área e perímetro, sendo unidades quadradas uma expressão desprovida de sentido para o aluno, que tal como tinha referido na questão 6, apresentou a mesma resposta, julgando tratar-se da mesma medida.



TD – Q7

Professora: Achas que a sete está mal? Porquê? O que é que tu achas que são unidades quadradas?

João: … Talvez os quadrados da outra pergunta. Mais ou menos, os quadrados estão por dentro.

Professora: Os quadrados que estão por dentro?

João: Sim, talvez.

Professora: Então continuas a achar que o perímetro e a área será a mesma coisa?

João: … Sim.

Professora: Mesmo pensando que a área envolve quadrados que estão por dentro?

João: Mais ou menos, sim.

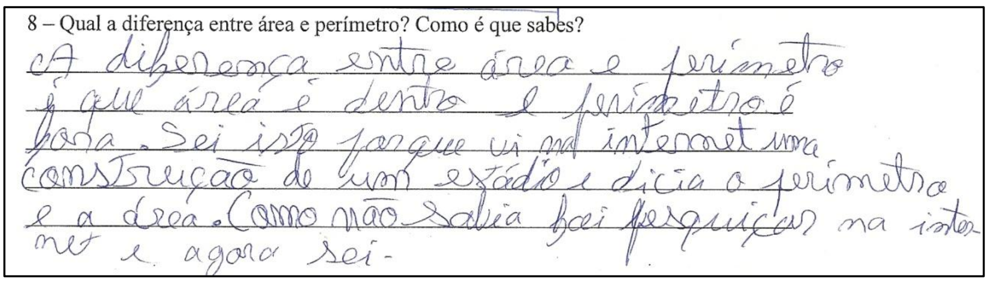
No seu discurso nota-se que João não está convencido, até porque começa a notar que os quadrados do interior da figura podem estar associados à área, mas continua a afirmar que área e perímetro são a mesma coisa.

Síntese. João determina a área de figuras como se estivesse a determinar o perímetro. O conceito de área não é totalmente estranho. O aluno associa a área à parte interior das figuras mas não encontra nenhuma forma de a obter nem fez qualquer referência a unidades de área ou à contagem de quadrículas do interior das figuras. Contrariamente a Mariana, não relaciona a área com fórmulas nem reconhece unidades de área, continuando a afirmar que ambas as grandezas se obtêm do mesmo modo.

Distinção entre perímetro e área

Seguidamente, apresento a análise do desempenho de João nas questões que envolvem a distinção entre perímetro e área, da primeira entrevista. Nas questões analisadas anteriormente foi notório que o aluno não consegue distinguir com clareza perímetro de área. Nas questões 8 e 9 do teste diagnóstico a resposta de João contradiz as respostas das questões anteriores.

Questão 8. Nesta questão João faz uma distinção clara entre perímetro e área, contrariamente ao que tinha afirmado durante a entrevista. Veja-se a sua resposta:


8 – Qual a diferença entre área e perímetro? Como é que sabes?

A diferença entre área e perimetro é que área é dentro e perimetro é fora. Sei isso porque vi na internet uma construção de um estádio e dicia o perimetro e a área. Como não sabia foi pesquiçar na internet e agora sei.

TD – Q8

João começa por afirmar que área é dentro e perímetro é fora e quando confrontado com o seu discurso contraditório, por afirmar anteriormente que eram a mesma coisa, diz que tinha respondido a esta questão “ao calhas”. Tentei perceber qual a origem da sua dúvida e esclarecer qual eram efetivamente as aprendizagens que tinha feito acerca deste assunto.

Professora: E então? O que é que é? É aquilo que escreveste ou aquilo que disseste?

João: As duas… mais ou menos aquilo que eu disse aqui nesta (apontando para a sua resposta à questão 6).

Professora: Tenta explicar-te melhor.

João: Esta aqui…

Professora: Qual é que tu achas que é a diferença entre a área e o perímetro? … Vamos lá lembrar as coisas que aprendeste no 1.º ciclo. Falaram sobre este tema?

João: Falámos. Acho que sim.

Professora: E o que é que te lembras de ter falado sobre isso ou de ter aprendido na altura?

João: Que, eu não me lembro muito bem mas acho que o perímetro era fora e a área era mais ou menos os quadradinhos que estavam por dentro, ou então por fora.

Professora: Então? Ou é por dentro ou é por fora?

João: Não sei, não faço ideia. Não demos muito bem esta matéria.

Professora: Não aprendeste muito bem mas tens uma ideia, de que alguma coisa era dentro e a outra coisa era fora?

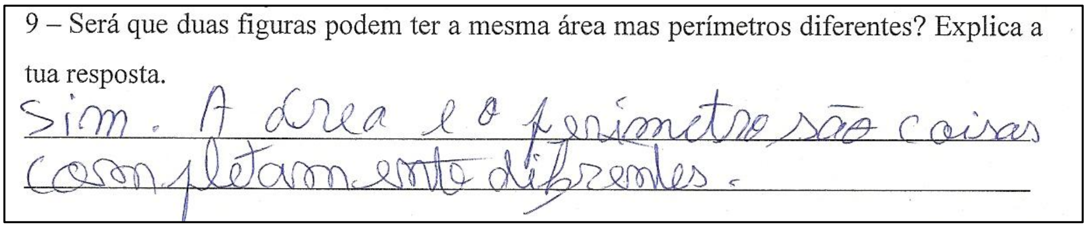
João: Sim.

Professora: E qual é que tu achas que era o de fora? O perímetro? Ou a área?

João: De fora… acho que é o perímetro.

Tal como foi subtilmente referindo ao longo da entrevista, João tinha a ideia de que o perímetro constituía uma medida “de fora” e área da medida “de dentro” referindo-se aos quadradinhos do interior mas afirma que não tem certezas e justifica-se com o facto de não terem dado bem essa matéria no 1.º ciclo.

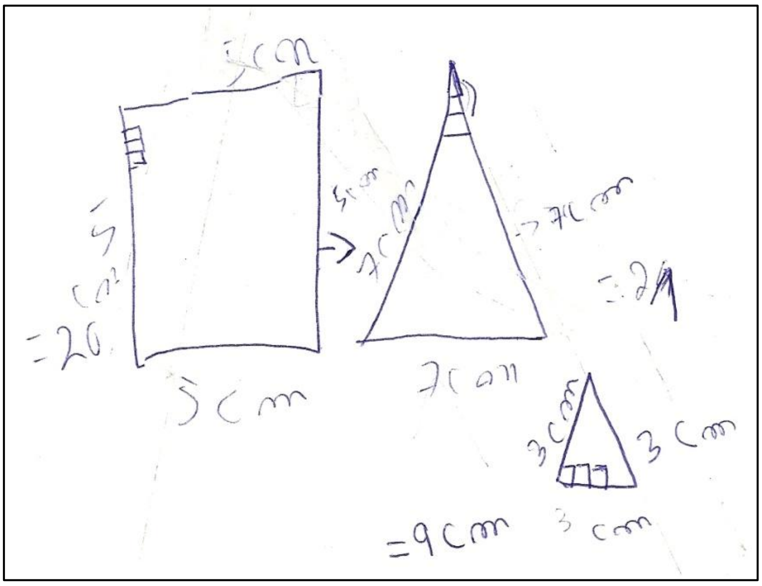
Questão 9. Nesta questão, João ainda se contradiz mais e escreve a seguinte resposta:


9 – Será que duas figuras podem ter a mesma área mas perímetros diferentes? Explica a tua resposta.

Sim. A área e o perímetro são coisas completamente diferentes.

TD – Q9

Ao tentar explicar a sua resposta João começa a falar em quadrículas no interior da figura e encontra um exemplo para demonstrar que um quadrado e um triângulo com o mesmo perímetro podem ter áreas diferentes porque no interior do triângulo caberiam menos quadrículas que no interior do quadrado. Assim, desenha as seguintes figuras e explica:



TD – Q9 (Construções de João para explicar o seu raciocínio)

João: Aqui tem menos área que este (comparando o quadrado com o triângulo maior) mas não é pouca a diferença porque … o que acontece é que, aqui, isto não tem aqui um biquinho como aqui. Portanto, logo, aqui (quadrado) podemos fazer quadrados inteiros mas aqui nesta parte do bico só podemos fazer metade de um quadrado. Logo leva a este (triângulo) ter menos quadrados que este (triângulo). Porque este aqui (triângulo) só tem metade de uns quadrados que dava por exemplo … aqui dá para fazer um quadrado. Nesse espaço que nós ocupamos aqui (colado ao vértice do triângulo) dá para fazer um quadrado, se estivesse aqui dava logo para fazer quatro (apontando os cantos do retângulo) ainda mais os que estão por dentro. Mais lá dentro.

Professora: Então essas figuras teriam área diferente. Então e o perímetro?

João: O perímetro… por exemplo…

Professora: Podia ser igual? O perímetro deste quadrado podia ser igual ao perímetro deste triângulo?

João: Podia.

Professora: Podia…Porquê?

João: Porque …sim …há um …eu estou aqui a pensar, há um número, que eu já não me lembro qual é que era, que, podia ser multiplicado por quatro ou multiplicado por três mas que seria igual… portanto este…se metermos aqui um número, que pode ser por exemplo, cinco centímetros (escrevendo 5 cm num dos lados do quadrado) …

João continua a explicar o seu raciocínio e vai-se apercebendo que a área corresponde ao número de quadrículas que podem preencher uma figura e perímetro à medida à volta, relembrando estes conceitos e as aprendizagens anteriores. Ao continuar a discussão com o aluno, este muda o seu discurso e consegue reformular algumas das respostas anteriores, como a da questão 4, embora comece a ficar confundido e a contabilizar as linhas à volta e do interior da figura e misturá-las com o número de quadrículas. Nesta fase, as suas ideias eram confusas e o aluno não tinha certezas, pelo que sugeri que fosse clarificando as suas conceções ao longo da unidade de ensino.

Síntese. João considera perímetro e área grandezas distintas e por isso mesmo percebe que figuras com o mesmo perímetro podem ter áreas diferentes mas não faz referência a figuras equivalentes, até porque ainda revela muitas dificuldades no que respeita ao trabalho com áreas. Ao longo da primeira entrevista calcula a área de figuras come se estivesse a calcular o perímetro. Tal como no estudo de Kidman e Kooper (1997), o aluno tem a perceção de que a área do retângulo é a soma das suas dimensões, usando uma abordagem aditiva para calcular a área, quando a estratégia multiplicativa seria a adequada. O aluno confunde com frequência as duas medidas e não reconhece nem utiliza unidades de área, para além de usar unidades do sistema métrico em diversas situações.

6.2.3. Compreensão de perímetro e área durante a unidade de ensino

Durante a unidade de ensino João foi participativo, colaborou nas discussões finais, intervindo de modo organizado e ouvindo as opiniões dos colegas. Mostrou-se empenhado, quer na realização das tarefas, quer na sua discussão. Nas fichas de trabalho 1, 3 e 5 trabalhou com Daniel M., um colega com imensas dificuldades de aprendizagem, embora empenhado e trabalhador. Ajudou imenso o colega e o trabalho de ambos resultou de modo bastante positivo. Nas fichas de trabalho 6 e 7 trabalhou com Rui, um colega com aproveitamento semelhante a João mas menos trabalhador e que se distrai com mais facilidade. Na ficha de trabalho 2 o grupo inicial de João não funcionou, pelo que teve de ser reformulado, o que veio a melhorar bastante o trabalho deste grupo. Seguidamente, apresento algumas situações vivenciadas ao longo das aulas, que me pareceram significativas no percurso deste aluno para a evolução do seu desempenho e para a sua compreensão de perímetro e área.

Perímetro

Na primeira entrevista, João mostra algumas dificuldades em determinar o perímetro de figuras quando não é discriminado o comprimento de todos os lados ou a figura está preenchida com quadrículas. No decorrer da unidade de ensino ainda mantém alguns erros. Na ficha de trabalho 1, continua a referir-se ao perímetro como sendo a parte de fora:

> **Professora:** Muito bem. A área não é o mesmo que o perímetro e podem ser diferentes. Mais coisas que tenham aprendido? O que é o perímetro afinal?
>
> **João:** É a parte de fora.

Na ficha de trabalho 4, ainda revela dificuldade em contar os lados das quadrículas à volta das figuras para determinar o perímetro, como se pode verificar na sua resposta à tarefa 2 a):

2.1 Figura A: 8
Figura B: 26
Figura C: 19
Figura D: 38

FT4 – Tarefa 2 a)

Também nesta ficha de trabalho, na tarefa 2 b), revela dificuldades em interpretar a questão. Não percebe o significado da expressão “considera como unidade de medida o lado de uma quadrícula”, nem consegue estabelecer a relação inversa entre a dimensão da unidade de medida e o perímetro.

2.2 4 lados com 2 quadrículas

FT4 – Tarefa 2 b)

O perímetro do círculo foi trabalhado na ficha de trabalho 5 e o grupo de João, apesar de não ter chegado à conclusão pretendida, a relação entre o perímetro e o diâmetro, encontrou o valor de π e a relação entre o raio e o diâmetro.

Círculo	**Diâmetro (d)**	**Raio (r)**	**Perímetro (P)**	**P : d**
Círculo 1	2,43	5,20	7,63	3,14
Círculo 2	12	6	37,7	3,14
Círculo 3	23,07	8,99	72,32	3,14
…	23,88	11,99	75,35	3,14

FT5 – Tarefa 5 (João e Daniel M.)

5 – Que relação existe entre o perímetro e o diâmetro de um círculo?
Regista as tuas conclusões.

-> O raio é metade do diâmetro.

FT5 – Tarefa 5 (João e Daniel M)

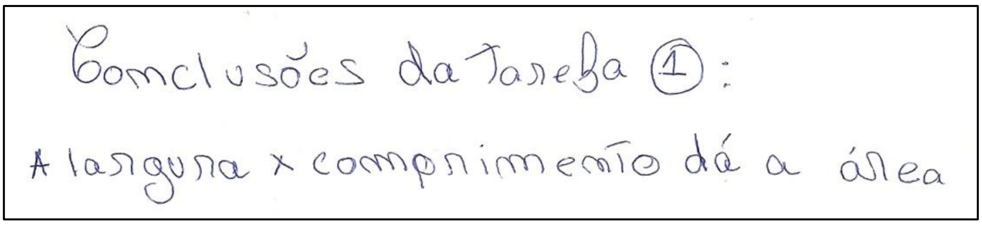
Na discussão da ficha de trabalho 5A, João não pôde estar presente, pelo que não há evidências da sua evolução, no que respeita ao estudo do perímetro do círculo, o que também pode ter prejudicado a aprendizagem do aluno, uma vez que a ficha de trabalho 5 pode não ter sido suficiente para formalizar e consolidar esta nova aprendizagem.

Área

No que diz respeito à determinação de áreas, na primeira entrevista João revelou dificuldade em encontrar a área de figuras, confundindo esta grandeza com o perímetro. Na ficha de trabalho 2, já começa a focar-se no significado de área e na forma de a determinar, como se pode verificar nesta discussão inicial desta ficha de trabalho:

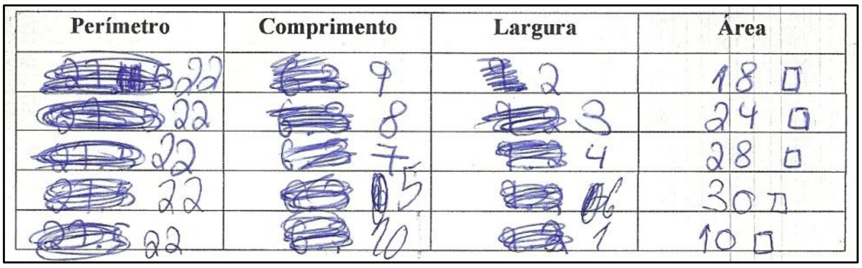
> **Professora:** No meio da confusão ninguém se entende. Vamos lá ver uma coisa, a área é o que está…
>
> **João:** Dentro.
>
> **Professora:** Dentro. Quantos quadradinhos é que eu teria aqui dentro?
>
> **João:** Para aí uns…
>
> **Professora:** Para aí não, vamos contar. (mostrando com a mão o número de quadrados da base fui contando) Aqui tenho um, aqui tenho dois e aqui tenho três, mais três?
>
> **Alunos:** Seis.

João refere-se à área como a parte de dentro e ainda não a associa a nenhuma fórmula, tentando estimar o número de quadrículas do interior da figura, mas obtém essa conclusão após terminar a tarefa 1.


Comclusões da Tarefa 1:
A largura x comprimento dá a área

FT2 – Tarefa 1 (João, Daniel M., Rafael e André)

Na mesma tarefa, o seu grupo tem a preocupação de indicar as unidades de medida de área ao preencher a tabela, esquematizando as quadrículas em vez de usar, inadequadamente, unidades do sistema métrico.



Perímetro	Comprimento	Largura	Área
22	9	2	18 □
22	8	3	24 □
22	7	4	28 □
22	5	6	30 □
22	10	1	10 □

FT2 – Tarefa 1 (João, Daniel M., Rafael e André)

Na resolução da tarefa 2 da mesma ficha de trabalho, João tinha previsto que a área do retângulo duplicava ao duplicar as medidas do comprimento e largura. Com a minha ajuda encontrou a relação correta:

Professora: Não é essa a conclusão que tiras. Observem a tabela com atenção. Vejam aqui, do seis para o doze o que é que aconteceu?

João: Multiplicámos por dois.

Professora: Então tentem descobrir. Olhem aqui, do três para o doze também está multiplicado por dois?

André: Não.

Professora: Está multiplicado por quanto?

André: Por quatro.

Professora: Então o que é que acontece à área?

João: Multiplicamos por quatro.

André: Aumenta quatro vezes.

Professora: Aumenta quatro vezes, não aumenta duas. Porque é que será quatro vezes?

João: Porque dois aqui (apontando para o comprimento) e dois aqui (apontando para a largura)…

Professora: Boa. A área vai ficar multiplicada por quatro. Vejam lá se isto acontece nos outros exemplos.

Esta discussão permitiu levar os alunos do grupo de João a focarem-se nos valores obtidos e registados na tabela para obter a conclusão pretendida. João foi mais longe e encontrou a origem dessa relação, reconhecendo o efeito do comprimento e da largura na área do retângulo. Também compreendeu que a fórmula da área do retângulo só funciona para retângulos, como se pode verificar neste excerto da discussão final da ficha de trabalho 2, durante a exploração de áreas por decomposição:

Professora: Doze quadradinhos, muito bem. Agora podemos multiplicar isto, podemos fazer comprimento vezes largura? Qual é que é o comprimento desta figura?

João: Não dá porque isto não é um retângulo.

Na ficha de trabalho 3 foi bastante participativo, ajudando o seu colega de grupo e, durante a discussão acerca das alturas do triângulo, consegue distinguir altura de lado e compreender que a altura é perpendicular à base.

Professora: Então o que é que á a altura do triângulo?

João: É a distância medida na perpendicular entre o vértice e o lado oposto.

Professora: Entre o vértice e o lado oposto (desenhando um triângulo no quadro). Se eu tiver o vértice aqui em cima qual é o lado oposto?

João: É o de baixo.

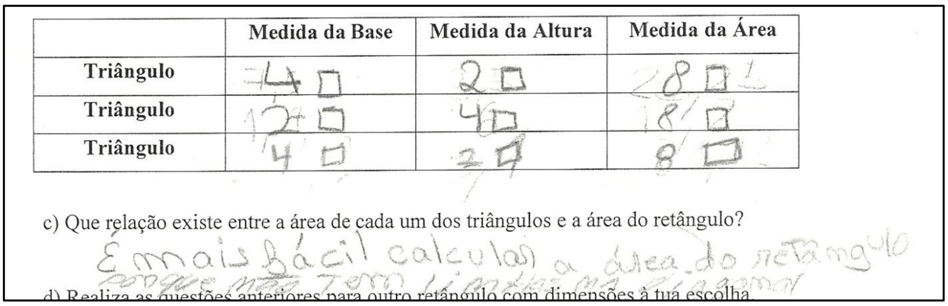
Professora: Então este lado aqui é uma altura (apontando para um lado inclinado)?

Alguns alunos: Não.

Professora: Porque é que não posso chamar altura a este lado?

João: Porque está em diagonal.

Na tarefa 2 da ficha de trabalho 3, sugere que para calcular a área do triângulo, à semelhança do retângulo, se multipliquem os lados. Também não esteve presente na aula onde foi discutida a relação entre a área do triângulo e do retângulo, pelo que não foi possível verificar se alterou a sua conjetura inicial, a fim de conseguir determinar a área do triângulo, dada a base e altura. Apresento a resposta do seu grupo na tarefa relativa a esse assunto, onde é possível verificar que o aluno continua a usar as unidades de medida de área corretamente mas não encontra os valores corretos para a área do triângulo, nem a relação entre as áreas dos dois polígonos.



	Medida da Base	Medida da Altura	Medida da Área
Triângulo	4 □	2 □	8 □
Triângulo	12 □	4 □	18 □
Triângulo	4 □	2 □	8 □

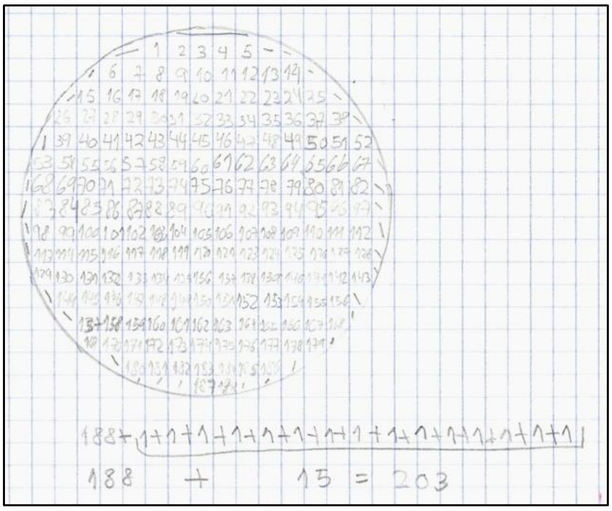
c) Que relação existe entre a área de cada um dos triângulos e a área do retângulo?

É mais fácil calcular a área do retângulo porque não tem linhas na diagonal

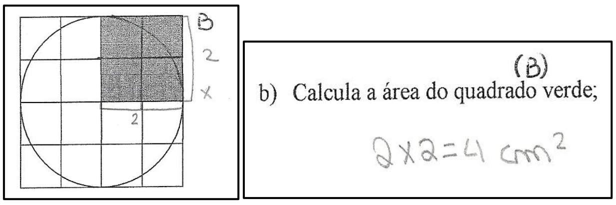
d) Realiza as questões anteriores para outro retângulo com dimensões à tua escolha.

FT3 – Tarefa 2 (João e Daniel M.)

Na ficha de trabalho 6, relacionada com o estudo da área do círculo, já consegue determinar a área de figuras preenchidas com quadrículas e, embora não tenha encontrado uma forma rápida de contabilizar as quadrículas do interior do círculo desenhado na tarefa inicial, aplica a fórmula da área do quadrado para determinar a área, Também indica a unidade de medida correta, como se pode verificar nas respostas do seu grupo:



FT6 – Tarefa inicial (João, Rui e Gonçalo)



FT6 – Tarefa 1 b) (João, Rui e Gonçalo)

Apesar de ter encontrado o valor correto da área do quadrado, inicialmente não conseguiu estimar a da área do círculo, pelo que não chegou a encontrar a relação entre a área das duas figuras, embora tenha procedido à alteração da área do círculo. O seu grupo limitou-se a indicar o valor das duas áreas, sem apresentar uma relação entre elas.

> d) Compara a área estimada do círculo azul com a área do quadrado verde. O que observas?
>
> circulo A = 12 cm^2
>
> quadrado B = 4 cm^2

FT6 – Tarefa 1 d) (João, Rui e Gonçalo)

João também faltou à aula onde foi discutida a ficha de trabalho 6 e realizada e discutida a ficha de trabalho 7. A área do círculo, foi, deste modo, um assunto que não foi trabalhado por este aluno. Apesar de ter melhorado as suas ideias no que diz respeito ao estudo da área, o facto de ter faltado a algumas aulas pode ter prejudicado bastante a sua aprendizagem e evolução, impedindo o aluno de colmatar algumas dificuldades e esclarecer algumas dúvidas iniciais, bem como determinar a área de figuras como o círculo ou o triângulo.

Distinção entre perímetro e área

Nas primeiras tarefas, em que a área e o perímetro eram estudados em simultâneo, João ainda revelou algumas dificuldades em distinguir área de perímetro e pouca destreza na determinação do perímetro e/ou área, especialmente na realização da ficha de trabalho 2. Ao longo da unidade de ensino foi consolidando as aprendizagens e compreendendo o conceito de área e a forma como se pode encontrar o seu valor, distinguindo-a de perímetro. Tornou-se capaz de identificar e desenhar figuras equivalentes, embora a noção de congruência de figuras planas não esteja tão esclarecida.

6.2.4. Compreensão de perímetro e área após a unidade de ensino

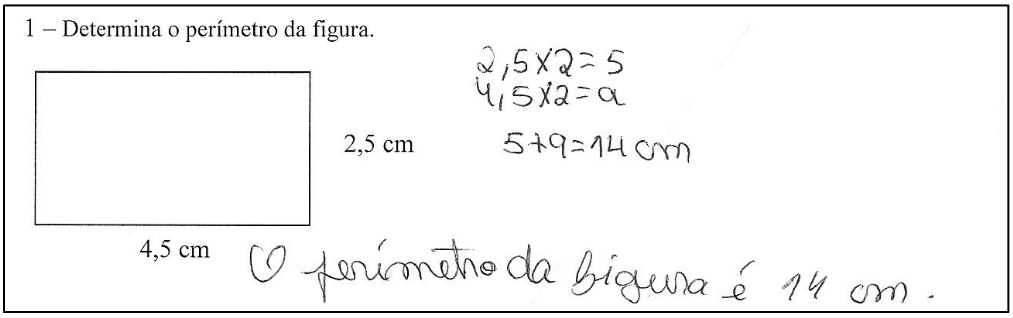
Perímetro

Apresento, seguidamente, a análise da resolução de tarefas relativas ao perímetro, da segunda entrevista realizada a João.

Questão 1. Nesta questão era necessário calcular o perímetro de um retângulo. Já no teste diagnóstico, o aluno teve sucesso na sua resolução mas não indicou unidades de medida. Voltou a responder correta e rapidamente à questão:

> **João:** Hã, o perímetro é o conjunto da medida do lado de fora, por isso como já temos aqui os cálculos dos lados, do comprimento e da largura, agora falta-nos fazer quatro, vírgula cinco vezes dois. Dá nove. Depois, dois vírgula cinco vezes dois dá cinco e o nove mais cinco.
>
> **Professora:** Muito bem. Pode fazer, podes responder. Nem precisaste de calculadora?
>
> **João:** Não.
>
> **Professora:** (No fim de João colocar os cálculos) Agora tens de pôr a resposta… Catorze centímetros. Muito bem!

João começa por se referir ao significado de perímetro, em vez de se limitar a descrever os cálculos, e já indica as unidades de medida na sua resposta.


1 – Determina o perímetro da figura.

2,5 cm

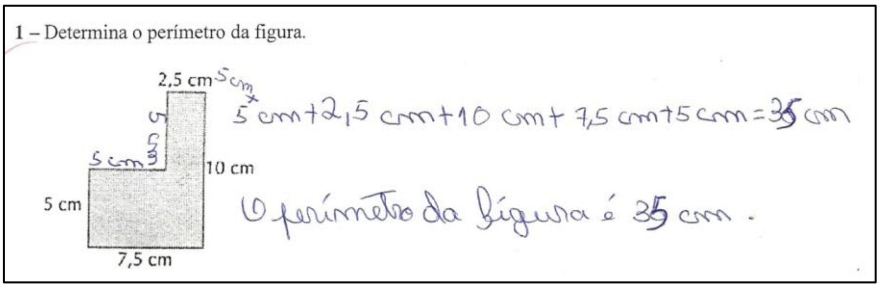
4,5 cm

2,5x2=5
4,5x2=9
5+9=14 cm

O perímetro da figura é 14 cm.

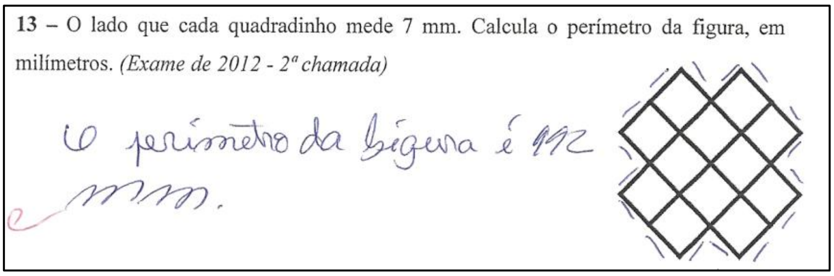
E2 – Q1

Questão 1 do teste final. Tal como no teste diagnóstico, esta questão pedia ao aluno para determinar o perímetro de uma figura que não tinha a indicação do comprimento de todos os lados. No teste final, contrariamente ao teste diagnóstico, João indicou o comprimento dos lados na própria figura e determinou o perímetro do polígono considerando todas as medidas, como se pode verificar na sua resposta:



TF – Q1

Questão 13 do teste final. Também nesta questão já consegue determinar o perímetro de uma figura preenchida com quadrículas, contabilizando todos os lados das quadrículas sem deixar falhas ou sobreposições.

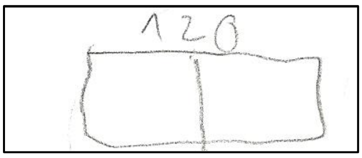


TF – Q13

Questão 2. João respondeu à questão com algumas dificuldades e necessitou de algum apoio porque começou por partir do pressuposto que o lado de um quadrado é metade do comprimento de um retângulo:

João: Acho que temos de fazer cento e vinte, este cento e vinte metros a dividir por dois porque se o quadrado for assim em cima, imaginemos, o retângulo é assim, esta parte se tiver cento e vinte, um quadrado terá que ser metade do retângulo. Portanto ia fazer cento e vinte a dividir por dois.

(Enquanto explicava João fez o seguinte esquema)



Professora: E um quadrado é sempre metade de um retângulo?

João: Acho que sim. Costuma ser…é.

Professora: É? E num quadrado o que é que acontece aos lados?

João: São mais pequenos e são todos iguais.

Professora: São todos iguais. Então lê lá a pergunta outra vez.

João: Só que depois o problema está, que a professora já descobriu, é que este vai ter sessenta (apontando para o comprimento do retângulo que desenhou) e este já vai ter oitenta (apontando para a largura do retângulo construído).

Professora: Então, já vai ser um quadrado?

João: Não.

Professora: Pois não.

João: Portanto este deve ser oitenta, como este também é oitenta, também deve ser.

Professora: Que garantia é que tu tens que vai ser oitenta, oitenta?

João: Porque é a única forma de todos os lados ficarem iguais.

Professora: Mas há outra coisa que tem que acontecer e pode não acontecer aí. Lê lá a primeira parte da pergunta.

João: Têm perímetros iguais.

Professora: Ah! Então se o quadrado tiver todo oitenta, vai ter o mesmo perímetro que esse retângulo?

João: Não.

Ao constatar que o quadrado tem todos os lados iguais, considerando a sua teoria inicial, os resultados não foram os esperados e altera a sua estratégia. Também não tem em consideração todos os dados do enunciado, em particular, o facto das duas figuras terem o mesmo perímetro. Quando alertado para esse aspeto, opta por dividir o perímetro do retângulo pelos quatro lados do quadrado.

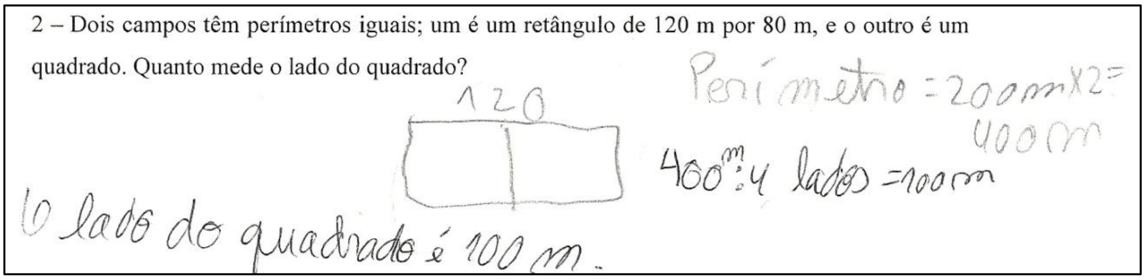
João: Ah não, primeiro temos de ver quanto é que é o perímetro. Cento e vinte mais o oitenta. Então o perímetro, o perímetro dá duzentos metros.

Professora: É? Só tem dois lados uma figura? Cento e vinte mais oitenta?

João: Não, agora vezes dois porque é estes dois e ainda faltam mais estes dois.

Professora: Ah!

João: Dá quatrocentos metros. Agora fazemos quatrocentos a dividir por quatro. Dá cem.


2 – Dois campos têm perímetros iguais; um é um retângulo de 120 m por 80 m, e o outro é um quadrado. Quanto mede o lado do quadrado?

120

Perímetro = 200m x 2 = 400m

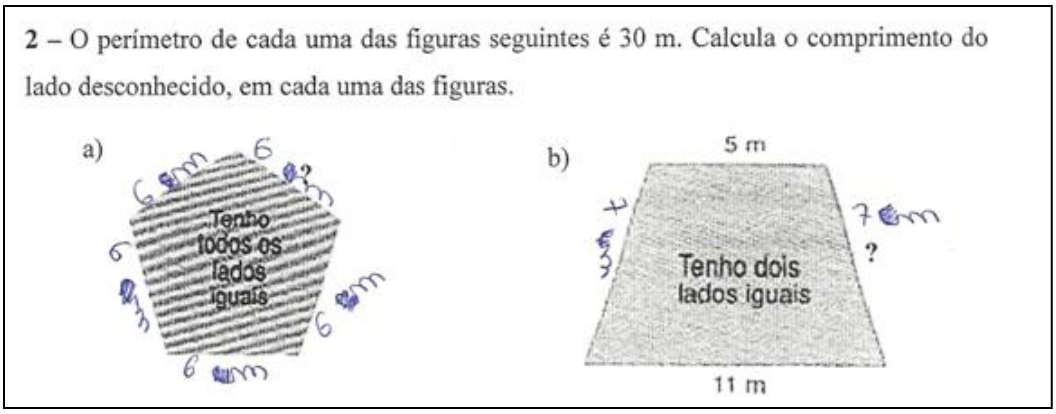
400m : 4 lados = 100m

O lado do quadrado é 100 m.

E2 – Q2

O aluno fez os cálculos mentalmente e reconheceu que, para obter o comprimento do lado do quadrado podia dividir o perímetro pelos quatro lados, por serem iguais e indicou sempre as unidades de medida corretas.

Questão 2 do teste final. Nesta questão tinha de determinar o comprimento do lado desconhecido de dois polígonos, sabendo o perímetro. Apesar de não indicar os cálculos, responde acertadamente e tem o cuidado de retificar a unidade de medida para ficar de acordo com o solicitado no enunciado.


2 – O perímetro de cada uma das figuras seguintes é 30 m. Calcula o comprimento do lado desconhecido, em cada uma das figuras.

TF – Q2

Questão 3. Nesta questão era necessário determinar do perímetro de uma pista circular. João identificou, de imediato, que era necessário determinar o perímetro mas as suas dificuldades começam no cálculo do perímetro do círculo:

João: Primeiro temos que descobrir o perímetro e depois temos que fazer algumas contas para ver mais, quanto é que eles correm.

Professora: Então como é que se calcula o perímetro do círculo?

João: Temos de ver este (apontando para o raio) vezes o diâmetro. Temos que fazer o raio vezes o diâmetro.

Professora: É?

João: E depois vezes o π.

Professora: É assim que se calcula o perímetro de um círculo?

João: Acho que sim. (Depois de algum silêncio) Já não me lembro como é que se calcula isto. Já esqueci.

Professora: Lembra-te da tarefa do Geogebra. O que é que andámos a fazer?

João: A construir os círculos.

Professora: Sim, e depois o que é que calculámos?

João: O perímetro e a área… O perímetro e a área.

Professora: E o que é que descobrimos?

João: É a área vezes o diâmetro vezes o π.

Professora: A área? Então, não sabes qual é a área!

João: A área não, o raio vezes o diâmetro vezes o π.

João reconhece a importância de π para o perímetro do círculo e inventa uma fórmula mas confunde raio e diâmetro. Após alguma discussão para clarificar as ideias do aluno, tento que se recorde da relação entre o diâmetro e o perímetro, explorada na ficha de trabalho 5, com o Geogebra:

Professora: Faz sentido utilizares o raio e o diâmetro? Foi isso que fizemos na tarefa do Geogebra? Vocês descobriram o π, pronto, estás-me a falar no π. Precisas do π, mas quando fizemos a tarefa no Geogebra descobrimos o valor de π. Com que valores é que nós andámos a brincar?

João: Três, vírgula catorze.

Professora: Que é o π, não é? Então e depois? O que é que fizemos para chegar ao π? Qual era a conta que a gente fazia para chegar ao π?

João: Raio vezes o diâmetro.

Professora: Não era raio vezes o diâmetro.

João: O raio mais o diâmetro. Não.

Professora: Ou usas o raio ou usas o diâmetro. Não faz sentido usar as duas medidas. Tu não consegues descobrir o diâmetro tendo o raio?

João: Consigo.

Professora: Qual é que é o valor desse diâmetro desse círculo?

João: Vinte metros.

Professora: Vinte metros. Então põe lá, vinte metros. Esse é o valor do diâmetro. Então para descobrir a linha que faz à volta para que é que precisas do raio e do diâmetro, dos dois? Ou usas um ou usas o outro.

João: Temos de fazer dez vezes dez vezes vinte? … Acho que temos de utilizar um deles.

Professora: Mas qual era o valor que nós usávamos quando andávamos lá no Geogebra a construir círculos? O que é que vocês tinham que medir?

João: O diâmetro.

Professora: O diâmetro…

João: A dividir pelo π.

Professora: E com isso vais obter o perímetro? O diâmetro a dividir pelo π?

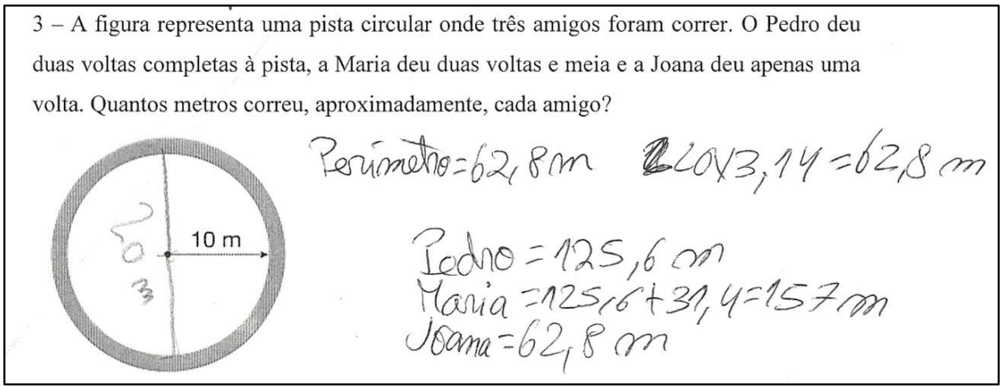
João: Diâmetro vezes o π.

Professora: Então? Como é que se calcula o perímetro afinal?

João: É diâmetro vezes o π.

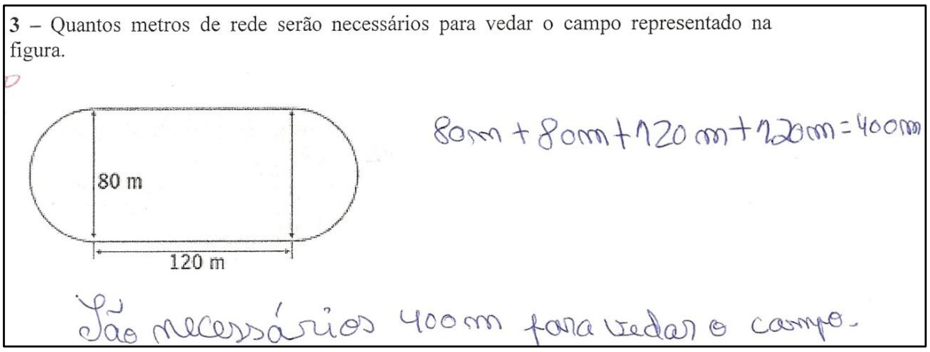
Ao clarificar a relação entre o raio e o diâmetro e perceber que só necessita de utilizar uma dessas medida para determinar o perímetro, recorda, finalmente, a fórmula explorada em aulas anteriores e utiliza-a na sua resposta, indicando a unidade de medida corretamente. Também percebe que a distância percorrida pelos amigos é proporcional ao número de voltas e faz os cálculos necessários para responder à questão.

João: Sim. Então, o Pedro deu duas voltas. Vai ser sessenta e dois, vírgula oito a dividir, vezes dois. Dá cento e vinte e cinco, vírgula seis. Portanto (enquanto escrevia) Pedro, cento e vinte e cinco, vírgula seis metros. Agora, a Maria deu duas voltas vamos ter que somar, então é cento e vinte e cinco, vírgula seis, agora, como é mais meia vamos ter que fazer os sessenta e dois, vírgula oito a dividir por dois que dá mais trinta e um, vírgula quatro, que dá cento e cinquenta e sete metros. Já está. Agora a Joana, a Joana deu uma volta, percorreu os sessenta e dois, vírgula oito metros e já está.


3 – A figura representa uma pista circular onde três amigos foram correr. O Pedro deu duas voltas completas à pista, a Maria deu duas voltas e meia e a Joana deu apenas uma volta. Quantos metros correu, aproximadamente, cada amigo?

E2 – Q3

Também na questão 3 do teste final percebeu que tinha de determinar o perímetro mas, tal como muitos dos seus colegas, limitou-se a calcular o perímetro do retângulo do campo representado na imagem.


3 – Quantos metros de rede serão necessários para vedar o campo representado na figura.

TF – Q3

Síntese. João revela compreensão do significado de perímetro, na medida em que consegue determinar o perímetro de várias figuras, tendo ou não indicado o comprimento de todos os lados, mesmo quando a questão não o solicita diretamente. Indica corretamente as unidades de medida e consegue determinar o comprimento de lados desconhecidos, quando é referido o perímetro do polígono. Relativamente ao perímetro do círculo, ainda demonstra ter dificuldade no seu cálculo, o que indica que não relaciona o diâmetro do círculo com o perímetro, e não faz uso da fórmula com compreensão. Comparando o seu desempenho antes da unidade de ensino e depois da unidade de ensino, mostrou melhorias e uma boa compreensão de perímetro, com aplicação correta das unidades de medida, do sistema métrico ou não.

Área

De seguida apresento a análise do desempenho de João na realização de tarefas relacionadas com áreas, depois da unidade de ensino.

Questão 6. Nesta questão era necessário determinar a área de um polígono desenhado em papel ponteado. João resolveu a questão sem dificuldades e sem confundir área com perímetro, contrariamente ao que tinha feito na primeira entrevista.

João: Então, cada quadrado destes tem um centímetro quadrado. Tenho que descobrir quantos quadrados tem e calcular os centímetros quadrados.

Professora: Muito bem.

João: (Após desenhar as quadrículas do interior da figura). Pronto, certo.

Professora: Então qual é a área da figura?

João: (Após contar as quadriculas que tinha desenhado, uma a uma). Dezasseis.

Professora: Então podes escrever a resposta. Lembras-te do teste diagnóstico ter uma pergunta deste género?

João: No segundo período?

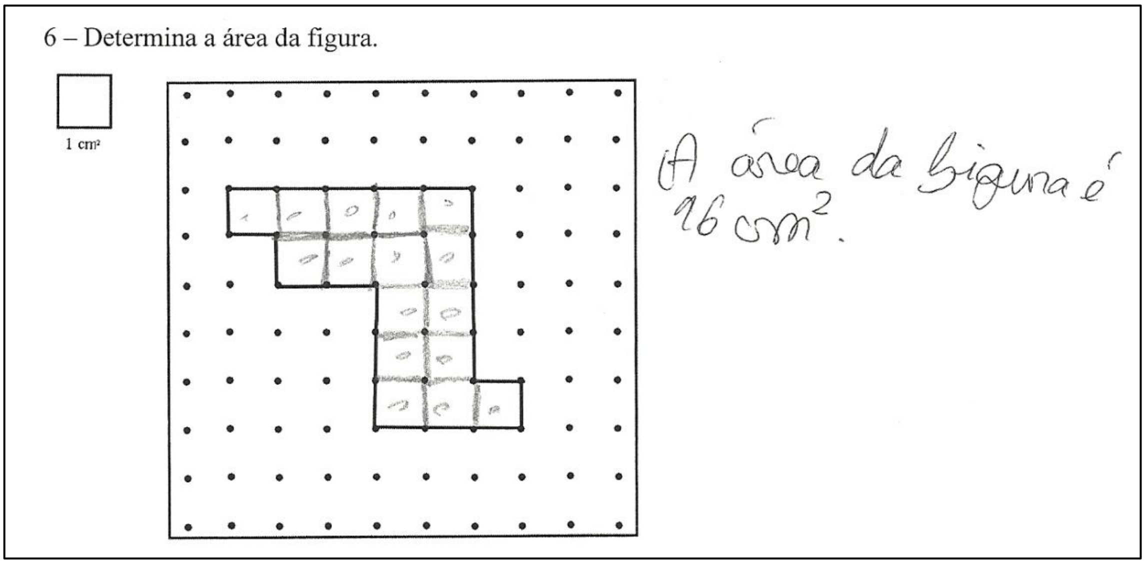
Professora: Sim. Agora já és capaz de responder sem dúvidas?

João: Sim.

Professora: Que a área é os dezasseis centímetros quadrados?

João: Sim.

João desenhou as quadrículas no interior da figura e contabilizou-as para determinar a área. Apesar de não o referir na entrevista, associa o valor encontrado para a área à unidade de medida pretendida, escrevendo- a na sua resposta.



E2 – Q6

Questão 7. Tal como aconteceu para o perímetro do círculo, João não conseguiu encontrar uma forma correta de calcular a área do círculo e começa por aplicar a fórmula que queria usar para determinar o perímetro:

João: Calcula a área de um círculo com cinco centímetros de raio. Então, primeiro vamos ter que desenhar um círculo que tenha cinco centímetros de raio.

Professora: Depois como é que tu descobres a área?

João: A área tenho de fazer o raio, aqui é que temos de fazer o raio vezes o diâmetro vezes o π.

Professora: Raio vezes o diâmetro?

João: Sim.

Professora: É? De certeza?

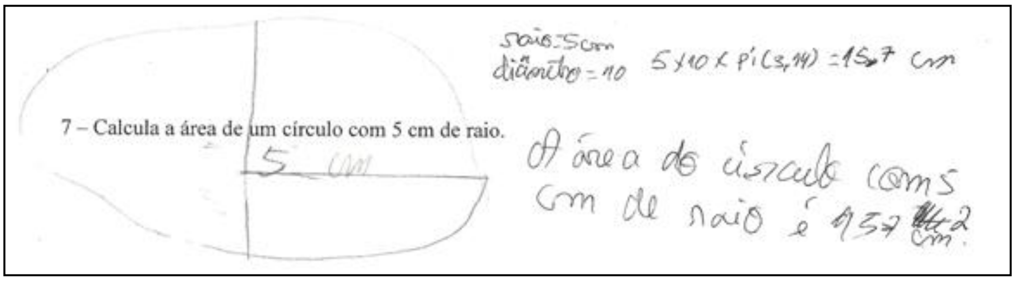
João: Absoluta.

Professora: Isso, nós fizemos naquela tarefa que nós andámos a cortar as partes do círculo e a juntá-las todas num retângulo. Depois a que conclusão é que chegámos?

João: Que a… Que o diâmetro, que o raio vezes o diâmetro vezes o π dava a área.

Professora: O raio vezes o diâmetro?... Faz como quiseres, faz como achares melhor.

João está convencido que a fórmula da área do círculo é raio$\times$ diâmetro $\times$ π. Note-se que o aluno não esteve presente na aula de exploração da área do círculo nem assistiu ou participou na discussão das fichas de trabalho 6 e 7, o que pode tê-lo induzido a este erro, ao estudar sem orientação, tentando decorar uma fórmula sem a compreender. Entretanto, João desenha um "círculo" e marca o raio e o diâmetro, começando a fazer os cálculos com base na sua fórmula. Observando a vírgula de π, estranha o resultado ser um número inteiro e coloca uma vírgula no resultado:



E2 – Q7

João: Tenho de fazer. Dá cento e cinquenta e sete centímetros, quinze, vírgula sete. Dá quinze, vírgula sete.

Professora: Então? (Rindo) Cento e cinquenta e sete? Quinze, virgula sete?

João: Quinze, vírgula sete.

Professora: Ai é? Só cabiam aí quinze, vírgula sete quadrados?

João: Cento e cinquenta… Dá cento e cinquenta e sete centímetros.

Professora: Centímetros? Então a área pode ser a medida em centímetros?

João: O raio estava em centímetros.

Professora: Mas o raio é uma linha. Não é uma linha?

João: É.

Professora: É um segmento de reta. E a área?

João: A área, metros, centímetros quadrados.

Professora: Porque é que é centímetros quadrados?

João: Porque a área temos de usar em metros, centímetros, quadrados.

Professora: Porquê?

João: Porque é assim a regra. Temos de usar quadrados, decâmetros quadrados, centímetros, decímetros quadrados.

Professora: Então mas o raio está em centímetros…

João: Mas o raio é uma linha.

Professora: E a área é o quê?

João: É a parte de dentro.

Professora: E a parte de dentro é preenchida com quê?

João: Por tudo, com quadradinhos.

É possível perceber, através desta discussão, que João já compreende o conceito de área e atribui sentido ao facto das unidades de medida de área do sistema métrico serem centímetros ou metros quadrados. Faz a distinção entre unidades de comprimento e unidades de área, por se tratarem de medidas diferentes na figura e apelando à noção de área.

Questão 8. Nesta questão era necessário calcular a área das figuras por decomposição. Como a alínea a) implicava o cálculo da área de um triângulo e de um círculo, João teve imensas dificuldades. Revelou estar cansado e não tinha assistido à aula onde foi discutida a área do triângulo, pelo que não a sabia calcular.

Professora: Muito bem. Essa parte temos que a tirar. Mas primeiro temos de imaginar que ela estava completa. Que figura temos aí?

João: Um triângulo.

Professora: Um triângulo. Então agora pensa lá bem o que é que andámos a fazer para descobrir a área do triângulo?

João: A base vezes altura vezes o π.

Professora: Vezes o π? No triângulo usavas o π?

João: Não, a base vezes altura, só.

Professora: Só? Então é como se fosse um retângulo, é isso? O triângulo é igual ao retângulo? É um lado, vezes o outro?

João: A conta para descobrir a área é. Acho que sim.

Professora: De um triângulo?... De um triângulo? É igual ao retângulo? Então eu ter um triângulo ou um retângulo é igual?

João: Sim porque dentro do retângulo cabem triângulos.

Professora: Só um triângulo?

João: Muitos. Depende do tamanho dos triângulos.

Professora: Então se for um triângulo com a mesma base e com a mesma altura? Só cabe um?

João: Não cabe. Tem que ter…

Professora: Não cabe? Então eu aqui não posso ter um triângulo com esta base e com esta altura? (pegando no retângulo da questão 1).

João: Pode se fizer até aqui e até…

Professora: Se eu fizer até aqui? Quantos triângulos estão aqui?

João: Dois.

Professora: Mas a área é a mesma? Estás-me a dizer que a área deste triângulo é igual à área deste retângulo?

João: Não a área dos dois é que é igual. A área do triângulo, deste triângulo é metade da do retângulo.

Professora: Pois é. Não foi o que nós dissemos na aula? Então como é que se calcula a área do triângulo? Estás-me a dizer que é metade. Então é metade ou é igual?

João: É metade, é metade.

Foi necessário discutir novamente a relação entre a área do triângulo e a área do retângulo para que João percebesse que uma era metade da outra, para encontrar uma fórmula que fizesse sentido para o aluno. Estava muito confuso e cansado e já misturava a base e/ou altura com π. Ao continuar a discussão, sabia que tinha de subtrair a área do círculo mas, como não tinha a certeza do modo como se calculava a área do círculo também andou confundido, até aplicar a fórmula usada na questão 7.

João: Então temos de fazer dois metros vezes um metro vezes três, vírgula catorze metros. Dá seis, vírgula vinte e oito metros. Agora já podemos ir calcular a área do triângulo e quando descobrirmos a área do triângulo vamos tirar os seis, vírgula vinte e oito.

Professora: Sim, muito bem. Então vamos lá calcular a área do triângulo.

João: Temos de fazer…

Professora: O que é que descobrimos que era a área do triângulo?

(Depois de uma grande discussão para levar o aluno a compreender a fórmula da área do triângulo)

João: É base vezes a altura a dividir por dois.

Professora: Eh, chegámos lá. Foi difícil.

João: Ah.

Professora: É a base vezes a altura…

João: A dividir por dois.

Professora: Porquê a dividir por dois?

João: O retângulo, este retângulo dá para meter dois quadrados.

Professora: Ou melhor, ao contrário, dá para meter dois triângulos.

João: Sim. Hum.

Professora: Ainda não tinhas percebido isto nas aulas?

João: Não.

Professora: Mas foi o que fizemos nas aulas. Não te lembras?

João: Sim, mas acho que não me lembrava muito bem da matéria da área do círculo e desta. São um bocadinho difíceis.

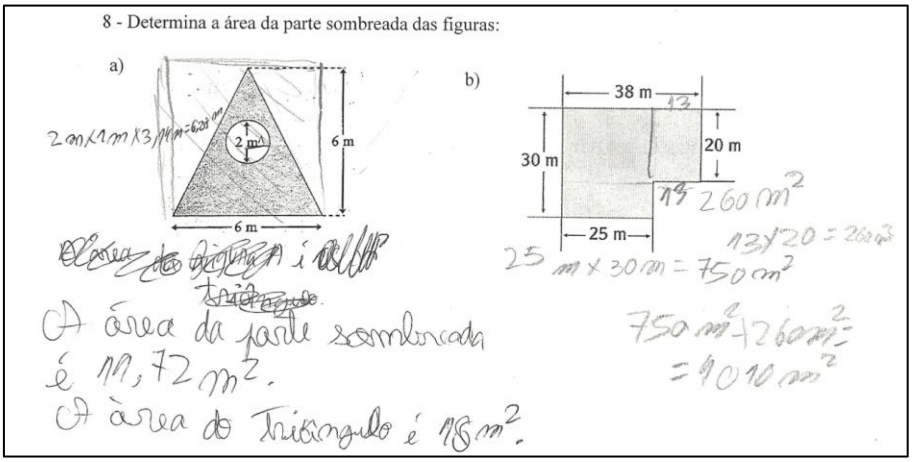
Professora: Porquê?

João: Porque é mais fácil dividir, digamos, se nós tivermos uma coisa redonda é mais fácil e tivermos uma coisa reta, nós sabemos que aqui temos um lado e aqui temos outro e é mais fácil. A área se é uma coisa redonda é mais difícil estar a contar o perímetro e daí…

Professora: Ou a área.

João: A área, sim.

Como refere neste excerto da entrevista, considera a área destas figuras muito difíceis, pelo que não é possível afirmar que utiliza a fórmula da área do triângulo com compreensão. Também não reconhece, aplica e muito menos compreende, a fórmula da área do círculo, por isso optei por trabalhar este assunto no fim da entrevista, para esclarecer o aluno e colmatar as suas dúvidas. De qualquer modo, sabia que tinha de determinar o espaço interior da figura e colocou as unidades de medida de área corretas na sua resposta.



E2 – Q8

No que diz respeito à alínea b) da questão 8, esteve mais à vontade, reconhecendo que tinha de dividir a figura.

João: A área do b)? Então, fazemos uma conta que para descobrirmos a área, temos de fazer o comprimento vezes a largura e temos que descobrir o comprimento e a largura.

Professora: Mas isto não é um retângulo.

João: Temos que fazer …

Professora: Não é um retângulo mas tem lá retângulos.

João: Pois tem.

Professora: Pois tem.

João: Se calhar, acho que se fizermos, dividimos assim (fazendo uma divisão da figura, na vertical, com o lápis), isto em vários triângulos.

Professora: Triângulos?

João: Em retângulos e juntarmos é mais fácil.

Professora: Pois é. E consegues calcular assim?

João: Acho que sim. Se fizermos assim (fazendo nova divisão na horizontal).

Professora: Precisas de dividir mais?

João: Está bom, acho que fica bom assim, nestes três.

Professora: Assim dá-te mais trabalho. Não consegues ficar só com dois?

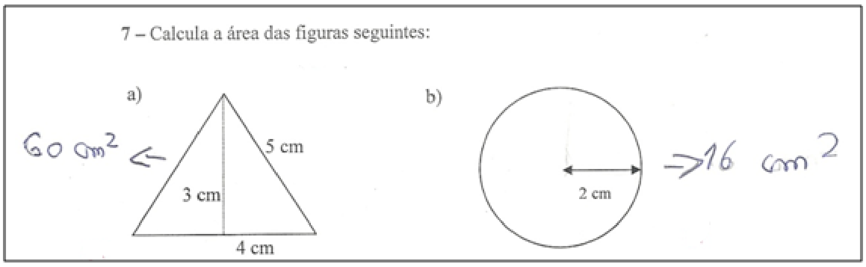
João: Consigo (apagando a linha da primeira divisão da figura). Vou apagar esta risca aqui. Ficou com dois, este e este. Então, agora primeiro temos que descobrir quanto é que vale esta parte para sabermos quanto é esta parte.

Professora: Então quanto é que vale?

João: Temos que fazer trinta e oito menos os vinte e cinco, que dá treze. Portanto aqui esta parte é treze…É esta parte vezes esta, que é vinte… Portanto para descobrirmos a área só desta é treze vezes vinte, que dá duzentos e sessenta metros. Esta é duzentos e sessenta metros quadrados. Agora vamos a esta. Esta, temos de fazer vinte e cinco metros vezes, temos de fazer aqui a conta. Vinte e cinco metros vezes trinta metros. Dá … Setecentos e cinquenta metros quadrados. Agora já descobrimos a área disto tudo mas a dividir por dois. Agora vamos ter que juntar a área das duas coisas para descobrirmos a total. Vai ser os setecentos e cinquenta metros quadrados mais os duzentos e sessenta metros da outra, que dá mil e dez.

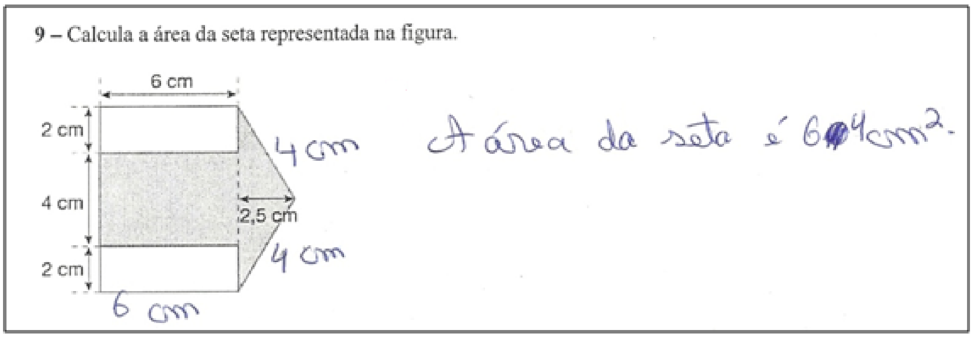
João necessitou de alguma orientação para fazer uma divisão mais simples na figura, acabando por dividi-la em dois retângulos. Determinou as suas áreas, sabendo que tinha de as adicionar para obter a área total. Nesta altura, determina, sem dificuldades, a área de retângulos, identificando corretamente a base e altura e respetivas medidas, mesmo não estando discriminadas na imagem. Também indica corretamente as unidades de medida, distinguindo as unidades de comprimento das unidades de área.

No teste final, nas questões 7, 9, 10 e 11, limita-se a apresentar um valor como área das figuras e indica corretamente as unidades de medida, mas sem qualquer cálculo ou indicação do raciocínio. Estas questões envolvem a área do triângulo e/ou círculo, pelo que seria de esperar que o aluno tivesse dificuldades, que foram identificadas na segunda entrevista, sendo que, o teste final foi realizado antes da segunda entrevista. Na questão 7 a), é possível que João tenha multiplicado as medidas indicadas na figura.

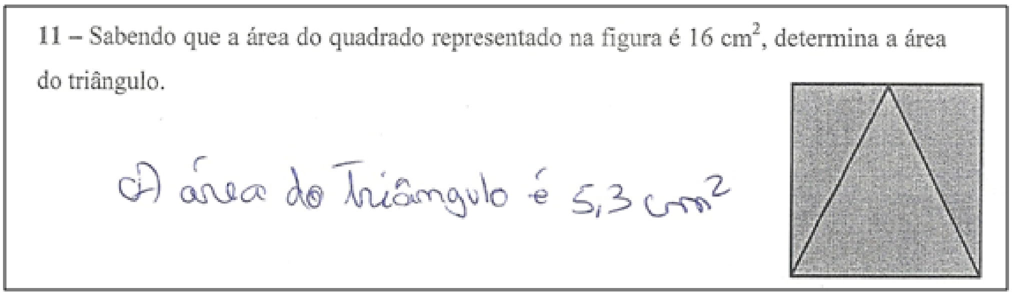


TF – Q7

Nas questões 9 e 11 não é possível compreender o raciocínio do aluno.

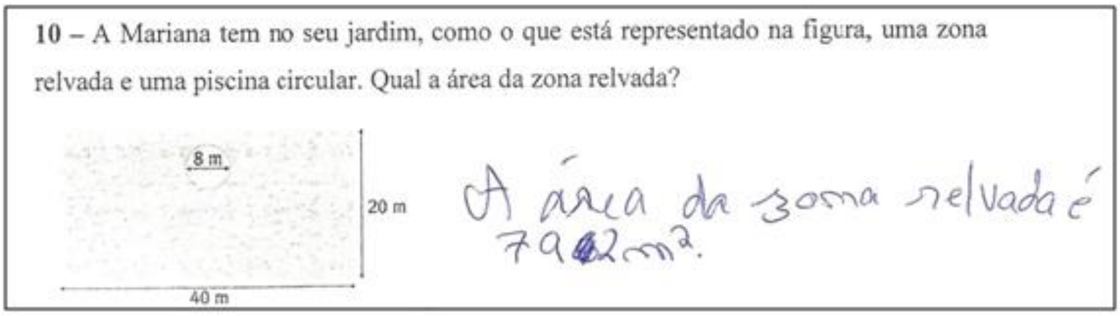

9 – Calcula a área da seta representada na figura.

TF – Q9


11 – Sabendo que a área do quadrado representado na figura é 16 cm², determina a área do triângulo.

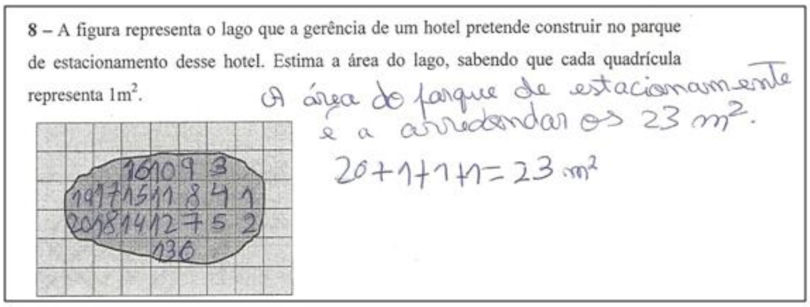
TF – Q11

Na questão 10 é possível que João tenha calculado a área do retângulo e retirado, em vez da área do círculo, como seria correto, o diâmetro do círculo.


10 – A Mariana tem no seu jardim, como o que está representado na figura, uma zona relvada e uma piscina circular. Qual a área da zona relvada?

TF – Q10

Questão 8 do teste final. João estimou a área da figura, contabilizando as quadrículas do seu interior, sem considerar inteiras as quadrículas que não estavam totalmente pintadas.



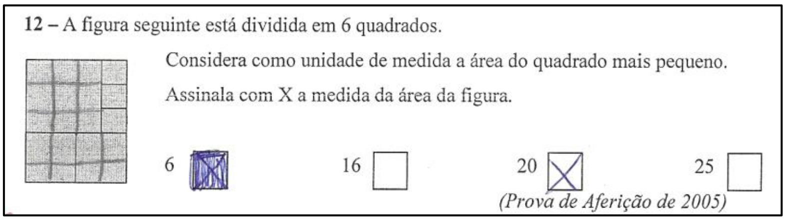
8 – A figura representa o lago que a gerência de um hotel pretende construir no parque de estacionamento desse hotel. Estima a área do lago, sabendo que cada quadrícula representa $1m^2$.

A área do parque de estacionamento é a arredondar os 23 m².

20+1+1+1=23 m²

TF – Q8

Também na questão 12 do teste final, considera a unidade de medida correta e assinala a medida da área.



12 – A figura seguinte está dividida em 6 quadrados.

Considera como unidade de medida a área do quadrado mais pequeno.

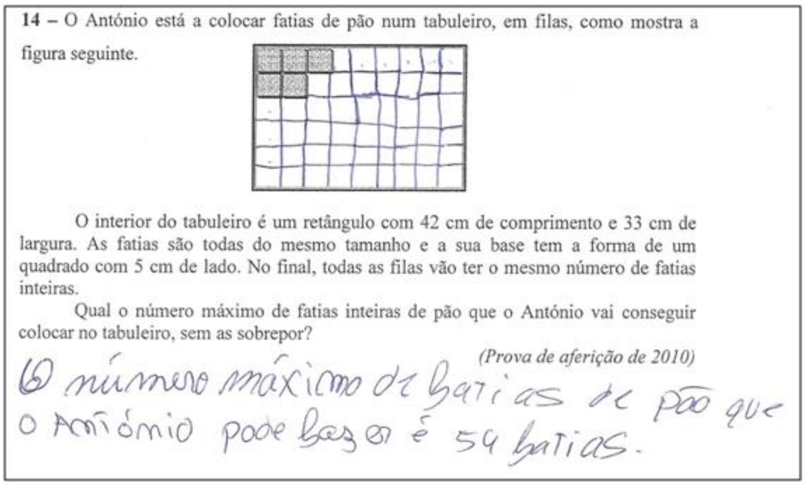
Assinala com X a medida da área da figura.

6 ☒ 16 ☐ 20 ☒ 25 ☐

(Prova de Aferição de 2005)

TF – Q12

Questão 14 do teste final. João usa a estratégia de preencher a figura com quadrículas, como a própria imagem da questão sugere. A compreensão de área dissociada do uso de uma fórmula memorizada está presente na sua resposta mas a divisão que faz da figura não tem em consideração os dados do enunciado nem as unidades desenhadas são congruentes. O seu raciocínio está correto mas a sua estruturação espacial para a construção de fileiras ainda está no nível 3, cobertura da fileira construída por medição, de acordo com Outhred e Mithelmore (2000).



14 – O António está a colocar fatias de pão num tabuleiro, em filas, como mostra a figura seguinte.

O interior do tabuleiro é um retângulo com 42 cm de comprimento e 33 cm de largura. As fatias são todas do mesmo tamanho e a sua base tem a forma de um quadrado com 5 cm de lado. No final, todas as filas vão ter o mesmo número de fatias inteiras.

Qual o número máximo de fatias inteiras de pão que o António vai conseguir colocar no tabuleiro, sem as sobrepor?

(Prova de aferição de 2010)

O número máximo de batias de pão que o António pode bazer é 54 batias.

TF – Q14

Síntese. João já consegue determinar áreas de várias figuras, à exceção do triângulo e círculo, quando dadas as suas medidas. Faltou às aulas onde foi feita a exploração da área do triângulo e da área do círculo, o que pode explicar a sua dificuldade e os erros cometidos, impedindo-o de usar as fórmulas da área destas figuras com compreensão. De qualquer já compreende o conceito de área, aplicando-o em várias situações e atribui sentido ao facto das unidades de medida de área do sistema métrico serem centímetros ou metros quadrados. Distingue unidades de comprimento de unidades de área, usando-as corretamente. Comparando a sua prestação antes e depois da unidade de ensino, o trabalho efetuado durante a unidade de ensino foi crucial para o aluno melhorar o seu desempenho e a sua compreensão de área, dissociada de fórmulas previamente memorizadas.

Distinção entre perímetro e área

Finalmente faço uma análise do desempenho de João no que respeita à distinção de área e perímetro, em questões que envolvem os dois conceitos, nomeadamente a equivalência e congruência de figuras planas.

Questão 4. Esta questão envolve a noção de figuras equivalentes, que o aluno compreende e aplica, começando a sua explicação do seguinte modo:

> **João:** Então temos de fazer uma figura ig... uma figura que tenha, primeiro vamos ter que fazer a área e o perímetro e vamos apontar. Depois vamos ter que fazer o desenho com os mesmos quadradinhos, neste caso com a mesma área, mas que tenha estas linhas, o perímetro, menor.
>
> **Professora:** E porque é que me dizes que tem de ter a mesma área?
>
> **João:** Porque é equivalente.
>
> **Professora:** E figuras equivalentes o que é que são?
>
> **João:** Têm a mesma área.
>
> **Professora:** Muito bem.
>
> **João:** O perímetro é (foi contando os tracinhos correspondentes ao lado de cada quadrícula) um, dois, três…. vinte e seis. O perímetro é vinte e seis. Agora…
>
> **Professora:** Esse retângulo está fechado.

João: Ah não, vinte e seis, vinte e sete, vinte e oito (continuou juntando os traços do retângulo branco no interior do cinzento) …trinta e seis. Agora vamos descobrir a área (começou a contar as quadrículas no interior da figura, uma a uma). Trinta e seis, também trinta e seis. Então, agora vamos desenhar uma figura que tem de ter de perímetro, tem de ter de área trinta e seis e perímetro tem que ter menos de trinta e seis. Primeiro vamos desenhar uma figura com trinta e seis. Encontrei uma forma que foi trinta e seis a dividir por quatro, dava nove. Fazemos um quadrado com nove, nove de perímetro, cada um, ia dar trinta e seis, aí pode ser que não tenha a mesma área porque este é aberto e o outro é fechado. (João começou a desenhar um quadrado nove por nove que iria ter o mesmo perímetro mas, obviamente, maior área).

João sabe que figuras equivalentes têm a mesma área e consegue, sem dificuldades, distinguir e determinar a área e o perímetro da figura, contando as quadrículas uma a uma para determinar a área e contabilizando as linhas à volta da figura para determinar o perímetro. Inicialmente não contabiliza as linhas correspondentes ao perímetro do retângulo do interior da figura, mas alertado para esse aspeto corrige o seu erro. O aluno começa por desenhar um retângulo com o mesmo perímetro com o intuito de o alterar e encurtar o perímetro, no caso de ter a mesma área. Auxiliei o aluno e sugeri que encontrasse um retângulo com a mesma área, já que tinha pensado em desenhar um retângulo.

Professora: Porque é que não tentas descobrir o retângulo que tem a área trinta e seis? (João começa a desenhar) Quais têm de ser as medidas para teres a área trinta e seis?

João: Então, tem que ser nove…

Professora: Nove num lado e noutro lado?

João: Três.

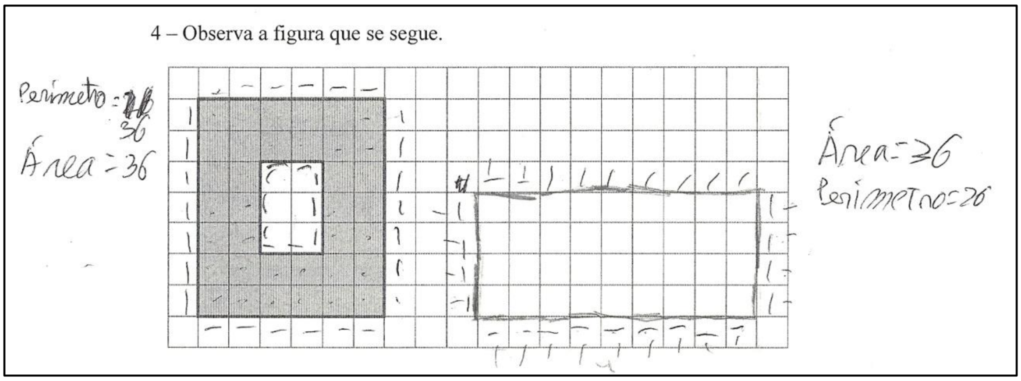
Professora: Nove vezes três?

João: Trinta e seis.

Professora: Não é nove vezes três.

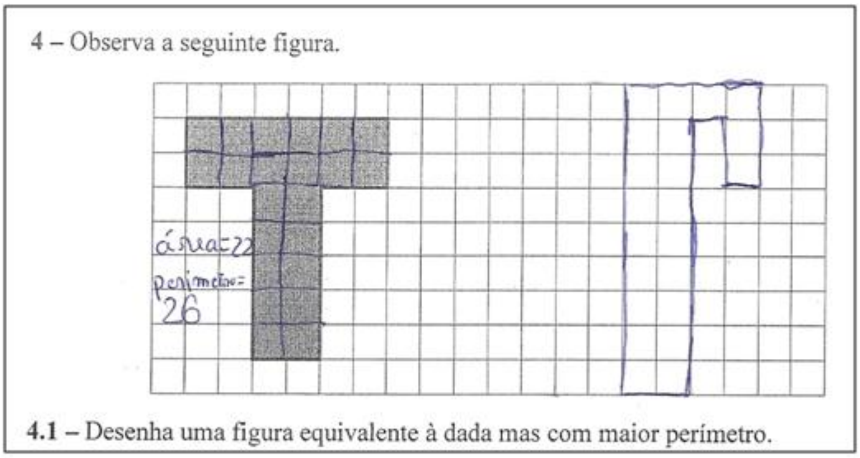
João: Ai é vezes quatro. (João desenha um retângulo nove por quatro). Primeiro vamos contar a área.

João já consegue abstrair-se da visualização da figura para encontrar retângulos com determinada área ou perímetro, o que não aconteceu nas primeiras tarefas da unidade de ensino. Após construir o retângulo, facilmente verificou que a área e o perímetro preenchiam os requisitos necessários para concluir a sua resposta.



E2 – Q4

Na questão 4 do teste final, também tinha conseguido desenhar uma figura equivalente com maior perímetro, tal como solicitado na questão.



TF – Q4.1

Questão 5. Nesta questão, para indicar se existem figuras congruentes, responde corretamente mas não apresenta uma justificação formalmente correta.

João: Primeiro temos de saber o que é que é figuras congruentes. Figuras congruentes são figuras que têm o mesmo perímetro.

Professora: Só?

João: O mesmo perímetro e a mesma área. Agora vamos contar o perímetro e a área das figuras e vamos ver se há alguma figura que seja congruente.

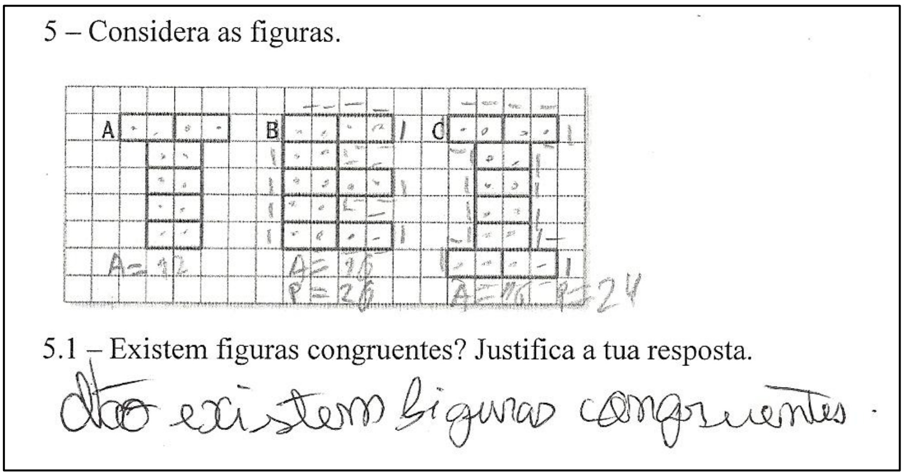
Professora: Só? Basta que elas tenham o mesmo perímetro e a mesma área para serem congruentes? Tens a certeza?

João: Tenho.

Professora: Não podem existir figuras com o mesmo perímetro e a mesma área e que não sejam congruentes?

João: Não, se têm a mesma área e o mesmo perímetro têm de ser congruentes. Acho que é assim.

O aluno define figuras congruentes como sendo aquelas que têm, para além da mesma área, o mesmo perímetro. De facto, estes dois pressupostos são verdadeiros para figuras congruentes mas não suficientes para cumprir todas as condições da congruência de figuras. A sua resposta é justificada com a indicação do perímetro e da área das três figuras representadas.

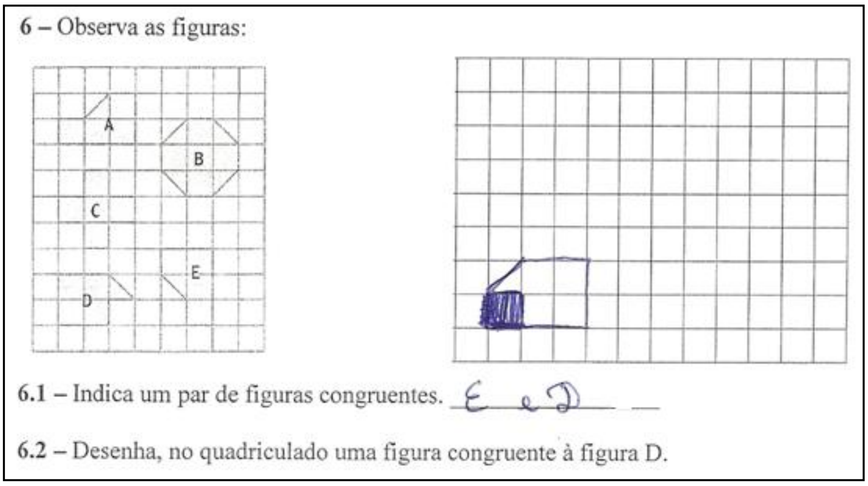

5 – Considera as figuras.

5.1 – Existem figuras congruentes? Justifica a tua resposta.

Não existem figuras congruentes.

E2 – Q5

Para evidenciar a ideia inicial do aluno (foi esclarecido no final da entrevista), apresento a sua resposta à questão 6 do teste final, em que indica duas figuras com o mesmo perímetro e a mesma área, acreditando que são congruentes:



6 – Observa as figuras:

6.1 – Indica um par de figuras congruentes. E e D

6.2 – Desenha, no quadriculado uma figura congruente à figura D.

TF – Q6

Na questão 6.2 desenha uma figura efetivamente congruente mas, considerando as suas declarações na entrevista, o seu raciocínio pode ter sido similar, pelo que o resultado final é irrelevante nesta questão.

Questão 9. João queria começar por dividir a área da figura por quatro, provavelmente julgando que os 25 m^2 eram o perímetro e estaria a obter o comprimento do lado. Considerando que, nesta fase, já distingue área de perímetro, esta falha pode ter sido resultante de uma distração ou má interpretação do enunciado da questão, pelo que orientei o aluno no sentido de o fazer refletir acerca do modo como obteria a área:

João: Acho que vamos, acho que esta é fácil. Vamos ter só de dividir por quatro. Então, imaginemos que, imaginemos que a sala é assim (desenhando um quadrado).

Professora: Vinte e cinco metros quadrados de área.

João: Assim, imaginemos que é assim. Isto, aqui por dentro tem vinte e cinco metros quadrados.

Professora: Hum hum.

João: Quando nós descobrirmos isto (apontando para o lado do quadrado desenhado) temos de fazer isto vezes isto (lado vezes lado).

Professora: Como é que tu obtinhas a área? O que é que tinhas de fazer?

João: O comprimento vezes a largura.

Professora: Então quais são os números que tu ias multiplicar para dar vinte e cinco?

João: Cinco vezes cinco, vinte e cinco.

Professora: Pronto, já descobriste o lado.

João: Ah! Aqui é cinco e aqui é cinco.

Professora: Porque é que aí é cinco e no outro lado é cinco?… O que é que te diz na pergunta?

João: Porque o cinco vezes o cinco dá vinte e cinco.

Professora: O cinco vezes o cinco dá vinte e cinco. E tem que ter os lados iguais?

João: Se é uma sala quadrangular tem.

Professora: Boa. Então agora qual é o perímetro?

João: Vinte.

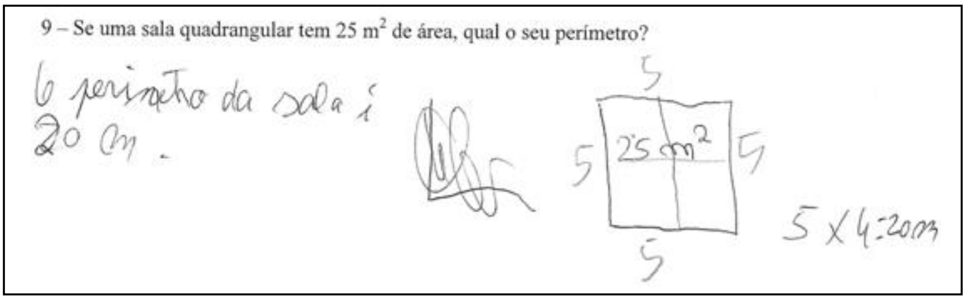
Professora: Porquê?

João: Porque os cinco, porque o cinco, porque cada lado tem cinco metros.

Professora: E porque é que vai dar vinte?

João: Cinco vezes quatro dá vinte.

Servindo-se da fórmula da área do retângulo, facilmente verificou que o lado do quadrado media 5 m e o perímetro correspondia ao produto desse valor pelos quatro lados iguais do quadrado. Indicou os cálculos e respondeu de modo acertado, utilizando, uma vez mais, a unidade de medida correta, neste caso, metros.


9 – Se uma sala quadrangular tem 25 m^2 de área, qual o seu perímetro?

E2 – Q9

Síntese. João revela um bom desempenho no que diz respeito à distinção entre perímetro e área. Mostra reconhecer figuras equivalentes, prevendo que figuras com a mesma área podem ter perímetros diferentes ou iguais e figuras com o mesmo perímetro, diferente área. A noção que tem de figuras congruentes não é totalmente correta porque, para ele, figuras congruentes só necessitam de ter a mesma área e perímetro, o que o leva a identificá-las incorretamente, apesar de as desenhar de acordo com a sua correta concetualização. Reconhece que área e perímetro são grandezas distintas porque correspondem a medidas distintas, com unidades de medida também e, por isso mesmo, distintas.

6.2.5. Síntese global

De um modo geral, João revelou-se empenhado e motivado no trabalho que desenvolveu, explicando bem o seu raciocínio e indicando, quase sempre, todos os cálculos, que muitas vezes fez mentalmente. Nalgumas questões, necessitou de apoio e orientação para reformular as suas estratégias iniciais, com vista à resolução correta das tarefas, mas foi notória a sua evolução, comparando a primeira com a segunda entrevista.

No que diz respeito ao perímetro, antes da unidade de ensino, o aluno mostra alguma compreensão deste conceito, aplicando as aprendizagens anteriores nas tarefas do teste diagnóstico. Consegue determinar o perímetro do retângulo e do triângulo mas não de figuras que não tenham indicado a medida de todos os lados. Não tem dificuldade em desenhar uma figura, dado o seu perímetro, mas apenas reconhece como unidades de medida, as do sistema métrico. Durante a unidade de ensino, continua a manter alguns erros na resolução de tarefas relativas ao estudo do perímetro de figuras preenchidas com quadrículas e não relaciona a dimensão da unidade de medida com o perímetro, nem o diâmetro do círculo com o perímetro dessa mesma figura. Após a unidade de ensino, já se mostra mais confiante na determinação de perímetros e revela uma boa compreensão do seu significado. Calcula o perímetro de polígonos e não polígonos, como o círculo (apesar de ainda necessitar de apoio para o fazer), quer diretamente, quer em situações que envolvam a resolução de problemas. Aplica corretamente as unidades de medida, do sistema métrico ou não. Na segunda entrevista revela que a tarefa que mais gostou de resolver foi calcular perímetros, em particular a primeira tarefa realizada com o Geogebra, a "tarefa da rede", como lhe chama, onde foi necessário determinar o perímetro dos campos de dois vizinhos. Refere já não sentir dúvidas ou dificuldades no que diz respeito ao tema perímetros.

Quanto à área, antes da unidade de ensino, João confunde-a com perímetro, embora o conceito de área não lhe seja completamente estranho. Associa a área à parte interior das figuras mas não encontra nenhuma forma de a determinar nem faz qualquer referência a unidades de área ou à contagem de quadrículas do interior das figuras.

Quando lhe é pedido que determine a área do retângulo ou outra figura, determina o perímetro. Também revela dificuldade em desenhar uma figura com determinada área, já que não distingue perímetro e área, julgando que desenhar uma figura com 24 unidades de perímetro ou 24 unidades quadradas de área é a mesma coisa.

Durante a unidade de ensino, o aluno vai melhorando a sua compreensão do conceito de área e da forma como pode determinar o seu valor. Utiliza, com compreensão, a fórmula da área do retângulo e aplica corretamente as unidades de medida, reconhecendo unidades de área diferentes das do sistema métrico, como sendo quadrículas. Consegue determinar a área de figuras preenchidas com quadrículas e estima a área de círculos, mas não determina a área de círculos usando a fórmula, pois faltou às aulas onde essa aprendizagem foi iniciada e consolidada. A área do triângulo também é um assunto onde revela dificuldade, pois não relaciona a área do triângulo com a do retângulo.

Após a unidade de ensino, João compreende o conceito de área, aplicando-o em várias situações e indicando corretamente as unidades de medida. Determina a área de várias figuras, à exceção do triângulo e círculo, provavelmente porque durante a unidade de ensino não pôde efetuar e/ou consolidar estas novas aprendizagens, por ter faltado a algumas aulas. Comparando a sua prestação antes e depois da unidade de ensino, melhorou bastante o seu desempenho e a sua compreensão de área, que é dissociada de fórmulas previamente memorizadas. Na segunda entrevista mostra-se consciente da sua dificuldade no que concerne à área do círculo, revelando ter tido mais dificuldades na tarefa de exploração de círculos com o Geogebra, por ser uma matéria nova e considerar ser mais difícil e trabalhoso determinar a área e o perímetro do círculo, por ser uma figura "redonda". Refere não sentir dificuldades em determinar a área de retângulos e quadrados.

No que respeita à distinção entre área e perímetro, antes da unidade de ensino, João confunde perímetro com área quando tem de determinar a área de figuras, pois determina o perímetro, indicando como unidades de medida, unidades de comprimento. Ao ser confrontado com os dois termos, reconhece serem distintos e indica que área se refere ao interior e o perímetro ao exterior mas não aplica este conhecimento para descobrir a área de qualquer figura. Durante a unidade de ensino vai melhorando e formalizando as suas ideias no que concerne a estas duas grandezas. Já consegue determinar a área do retângulo e de figuras preenchidas com quadrículas, indicando corretamente as unidades de medidas, sem as confundir com as do perímetro. Após a unidade de ensino, melhora ainda mais o seu desempenho, reconhecendo que área e perímetro são grandezas distintas porque correspondem a medidas distintas, conseguindo, igualmente, distinguir unidades de comprimento de unidades de área passando a usá-las corretamente. Compreende e aplica os conhecimentos relativos à equivalência de figuras planas, mas o seu conceito de figuras congruentes ainda não é correto. Revela uma boa evolução ao nível dos conceitos de área e perímetro, apesar de ainda ter dificuldade em determinar o perímetro e a área do círculo e a área do triângulo.

Capítulo 7

Conclusões

Neste capítulo começo por apresentar uma síntese do estudo e, de seguida, analiso os seus principais resultados no que respeita à aprendizagem dos conceitos de perímetro e área, em função das questões da investigação. Também faço uma reflexão pessoal acerca do significado deste estudo para mim, enquanto professora e investigadora, e analiso os possíveis contributos desta investigação para a comunidade profissional dos professores de Matemática e as suas limitações, apresentando algumas recomendações para futuros estudos nesta área.

7.1. Síntese do estudo

Os conceitos de perímetro e área são de difícil compreensão para os alunos do ensino básico (Kenney & Kouba, 1997; Lindquist & Kouba, 1989; NCTM, 2007). Os alunos usam fórmulas sem compreensão e não as relacionam com a grandeza a medir ou com a unidade de medida usada, confundindo muitas vezes perímetro com área (Kidman, 1999, Battista, 2007, Cavanagh, 2008). De acordo com o *Programa de Matemática para o Ensino Básico* (ME, 2007) e a literatura existente sobre o tema, os alunos devem compreender e desenvolver as fórmulas e procedimentos por meio de investigações e não pela sua memorização, devendo estes conceitos geométricos ser abordados de modo a que possam desenvolver um sentido intuitivo para a sua aplicação, resolvendo tarefas onde possam observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e operar com elas. Assim, através deste estudo, procuro perceber que de que modo os alunos desenvolvem os conceitos de área e perímetro, para perceber que dificuldades experienciam, os êxitos conseguidos e os caminhos percorridos.

O quadro teórico incide sobre aspetos relacionados com a aprendizagem dos conceitos de comprimento, perímetro e área, nomeadamente: (i) erros e dificuldades associados ao perímetro e área; (ii) origem dos erros dos alunos relacionados com perímetros e áreas; e (iii) estratégias, propostas em vários estudos, para que os alunos ultrapassem as suas dificuldades e minimizem os seus erros.

Este estudo tem por base uma unidade de ensino sobre o tema perímetro e área que segue as orientações do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) e as *Normas* do NCTM (2007), bem como a revisão de literatura que efetuei sobre o tema, contemplando tarefas de natureza problemática, exploratória e investigativa, algumas com o uso do computador, nomeadamente o programa de geometria dinâmica – *Geogebra.*

O objetivo e as questões que foram formuladas para esta investigação levaram à adoção de uma metodologia de natureza qualitativa, inserida no paradigma interpretativo e tendo por base estudos de caso. A recolha de dados decorreu no ano letivo de 2012/2013, sendo os participantes do estudo os meus alunos de uma turma de 5.º ano, onde selecionei dois alunos que foram objeto de análise mais aprofundada em estudo de caso. A principal fonte de recolha de dados foram as entrevistas realizadas aos alunos estudo de casos antes e após a unidade de ensino, os testes (diagnóstico e final), as produções escritas dos alunos durante a unidade de ensino e o diário de bordo, bem como as gravações áudio e vídeo das aulas.

7.2. Conclusões do estudo

As conclusões que a seguir apresento visam dar resposta às questões formuladas para esta investigação, indicando as dificuldades, erros e caminhos percorridos pelos alunos no trabalho com perímetro, área e na distinção entre perímetro e área.

7.2.1. Perímetro

Antes da unidade de ensino. Os alunos revelam ser capazes de considerar o perímetro como sendo a linha à volta de uma figura mas mostram dificuldade em determinar o perímetro de figuras simples, como um retângulo, ou de figuras que não têm indicadas as medidas de todos os lados. No teste diagnóstico, vários alunos dos que responderam às questões para determinar o perímetro de figuras fizeram apenas a soma dos comprimentos dos lados que estavam indicados, cometeram erros na indicação do comprimento dos lados que estavam em falta ou não fizeram a contagem correta dos lados das quadrículas que limitavam a figura, deixando falhas. Também Barrett e Clements (2003) referem estudos onde as crianças demonstraram dificuldades em identificar a unidade em objetos cujo comprimento estão a quantificar e atribuem valores inexatos a comprimentos dados, cometendo erros na contagem das marcas que fizeram nas figuras.

Mariana e João revelam associar o perímetro à medida à volta da figura e ambos os alunos conseguem determinar o perímetro de figuras simples como o triângulo ou o retângulo. No entanto, ao contrário da sua colega, João deixou falhas na contagem de unidades de comprimento à volta das figuras e não considerou o comprimento de todos os lados para determinar o perímetro de figuras poligonais.

No que respeita à utilização das unidades de medida, vários alunos não fazem qualquer indicação da unidade de medida de comprimento, apresentando como resposta, unicamente, o valor correspondente ao perímetro. João e Mariana não cometem essa falha mas só reconhecem as unidades do sistema métrico, indicando como unidade de medida centímetros ou metros em vez de lados de quadrícula ou "tracinhos". Ambos conseguem fazer conversões nas unidades de medida de comprimento do sistema métrico, transformando centímetros em metros e vice-versa, rápida e eficazmente.

Durante a unidade de ensino. Em várias tarefas realizadas na sala de aula, considerando as dificuldades de caráter geral, os alunos revelaram alguma falta de autonomia, dificuldade de concentração, dificuldade em interpretar os enunciados das tarefas, não tendo, muitas vezes, o cuidado de considerar todas as informações do enunciado. Também tiveram dificuldade em registar e elaborar as suas conclusões.

Nas primeiras tarefas com o Geogebra os alunos mediram e visualizaram perímetros e foram clarificando as suas ideias iniciais. Nas tarefas com o recurso ao geoplano, inicialmente, tiveram alguma dificuldade em medir comprimentos, misturando os instrumentos de medição como o geoplano e a régua graduada, mas foram trabalhando com diversas unidades de medida, para além das do sistema métrico. Na ficha de trabalho 4 alguns alunos, incluindo João, ainda apresentavam dificuldade em interpretar a expressão "unidade de medida" e em relacionar o perímetro com a sua unidade de medida, não percebendo de imediato que, quanto maior a unidade de medida, menor o perímetro. Também apresentaram erros de redução nas unidades de medida e erros de cálculo ou contagem. No estudo de Clements et al. (1997), os alunos também subestimaram a relação inversa entre o tamanho da unidade e o número de unidades. De registar que Mariana conseguiu relacionar o perímetro com a dimensão da unidade de medida, evitando o uso de unidades de medida do sistema métrico em situações onde a unidade de medida não era especificada.

Nas tarefas relacionadas com o perímetro do círculo, os alunos estabeleceram relações entre raio, diâmetro, perímetro e π, explorando e discutindo formas de obter o perímetro do círculo ao invés de decorarem a fórmula indicada pela professora. Os alunos conseguiram relacionar o raio com o diâmetro e encontraram o valor de π quando compararam o perímetro com o diâmetro do círculo, como foi o caso do grupo de João, mas nem todos conseguiram relacionar o diâmetro com o perímetro, a fim de encontrar uma fórmula para o perímetro do círculo. A passagem do raciocínio geométrico para o algébrico não foi bem conseguida. Mariana foi uma das exceções, tendo conseguido resolver as situações problemáticas envolvendo o perímetro do círculo, aplicando com destreza a fórmula descoberta e discutida e explicando aos colegas o seu raciocínio. A aluna relaciona o raio e o diâmetro do círculo com o perímetro de modo correto e usa a unidade de medida adequada.

Apesar das dificuldades e erros cometidos, ao longo da unidade de ensino, os alunos perceberam que tinham de calcular o perímetro quando era solicitada uma distância ou o comprimento de uma vedação, embora alguns ainda não apresentem ou confundam as unidades de medida de comprimento com as de área.

Depois da unidade de ensino. Os alunos melhoraram o seu desempenho no que respeita à determinação de perímetros de figuras mesmo daquelas que não têm indicação do comprimento de todos os lados. No que diz respeito à compreensão do conceito de perímetro, houve uma melhoria significativa no desempenho dos alunos, que agora determinam o perímetro considerando linha à volta das figuras ou somando os comprimentos dos lados ou das medidas apresentadas, no caso dos polígonos, embora alguns ainda evidenciem falhas.

No que respeita ao perímetro do círculo, os resultados não foram tão bons quanto o esperado, o que se pode explicar por se tratar de um assunto novo para os alunos e por o círculo não ser um polígono, o que implica uma maior dificuldade no cálculo do seu perímetro. As tarefas de descoberta da relação entre o perímetro e o diâmetro não se revelaram suficientes para uma boa compreensão e uso da fórmula obtida, tendo os alunos, cometido o erro de multiplicar o valor do raio por π para obter o perímetro do círculo.

Mariana revela boa compreensão do significado de perímetro, indicando corretamente as unidades de medida e conseguindo determinar o comprimento de lados desconhecidos quando é indicado o perímetro do polígono. De acordo com os níveis de sofisticação de desenvolvimento do raciocínio de Battista (2006), a aluna usa um raciocínio mensurável, situando-se no estádio de desenvolvimento mais avançado (nível 4), integrando e aplicando o processo não mensurável do nível 2 com o seu raciocínio mensurável e, portanto, operando com medidas numéricas. Além disso, consegue abstrair-se do atributo a ser medido e da repetição de unidades (Battista, 2007). João também revela uma boa compreensão do significado de perímetro, na medida em que determina o perímetro de várias figuras e indica corretamente as unidades de medida, conseguindo, igualmente, descobrir o comprimento de lados desconhecidos, quando é indicado o perímetro do polígono. Relativamente ao perímetro do círculo, demonstra ter dificuldade no seu cálculo, o que indica que não relaciona o diâmetro do círculo com o seu perímetro e não faz uso da fórmula com compreensão. As suas dificuldades neste assunto podem estar relacionadas com o facto de ter faltado à aula de discussão do perímetro do círculo.

7.2.2. Área

Antes da unidade de ensino. Comparando as dificuldades apresentadas inicialmente nas questões relativas à área e ao perímetro, os alunos revelaram muito mais dificuldade na compreensão do conceito de área e no cálculo do seu valor, mesmo no caso do retângulo ou figuras previamente preenchidas com quadrículas, supostamente trabalhadas no 1.º ciclo. No teste diagnóstico foram vários os alunos que determinaram o perímetro da figura quando era solicitada a área, sendo bastante baixa a percentagem de sucesso no cálculo da área até de figuras simples como o retângulo, em que quase metade dos alunos calculou o perímetro, apresentando, inclusivamente, a unidade de medida em metros. Também Kidman (1997, 1999) identificou este erro e referiu que os alunos confundem frequentemente área com perímetro, usando abordagens aditivas para calcular áreas, quando as estratégias multiplicativas seriam as adequadas.

Mariana usa a fórmula da área do retângulo e refere que a área corresponde ao espaço interior de uma figura mas não usa esse conhecimento para determinar a área de figuras previamente preenchidas com quadrículas. A sua compreensão do conceito de área é limitada ao uso da fórmula memorizada. A aluna consegue distinguir unidades de comprimento de unidades de área, no que diz respeito à indicação das unidades de medida de perímetro e de área respetivamente, mas não as usa com compreensão nem faz a leitura correta das unidades de área, sendo também evidente que só reconhece as unidades do sistema métrico.

João revelou ter dificuldades na determinação de áreas, confundindo área com o perímetro. Apesar do conceito de área ser associado à parte interior das figuras, não encontra nenhuma forma de a calcular nem fez qualquer referência a unidades de área ou à contagem de quadrículas do interior das figuras. Contrariamente a Mariana, não relaciona a área com nenhuma fórmula nem reconhece unidades de área, afirmando que perímetro e área se obtêm do mesmo modo.

Durante a unidade de ensino. Nas primeiras fichas de trabalho, os alunos foram clarificando a sua noção de área e respetiva unidade de medida. Quase todos os grupos concluíram que podiam obter a área do retângulo multiplicando os lados, sendo que o geoplano se revelou um bom recurso para explorar esta relação e a estrutura de fileiras, apesar das dificuldades iniciais em identificar as unidades de área no geoplano. Os alunos contavam os pregos em vez do espaço compreendido entre quatro pregos. À semelhança dos alunos do estudo de Tierney, Boyd e Davis (1990), João acreditava que se os comprimentos dos lados de um quadrado duplicavam também duplicava a área. No entanto, com a minha ajuda e o trabalho com o geoplano, o aluno conseguiu reconhecer o efeito do comprimento e da largura na área do retângulo e compreendeu que a fórmula da área do retângulo só funcionava para retângulos. Já começa a focar-se no significado de área e na forma de a determinar, referindo-se à área como a parte de dentro das figuras e tentando estimar o número de quadrículas do interior da figura. Também tem a preocupação de indicar as unidades de medida de área, representando as quadrículas mesmo não sendo unidades do sistema métrico. Nesta fase, também Mariana reconheceu que a fórmula da área do retângulo não funcionava para todas as figuras planas e mostrou curiosidade em determinar áreas de outro modo, fazendo referência à contagem de quadrículas do interior das figuras como uma forma de obter a área de qualquer figura.

Na ficha de trabalho 3, preparada para explorar a área do triângulo, os alunos demonstraram dificuldade em classificar triângulos, perdendo muito tempo com esta tarefa e tiveram dificuldade em perceber que os triângulos têm três alturas, pois não conseguiram construí-las e visualizá-las no Geogebra. O uso deste recurso nesta tarefa revelou-se pouco eficaz e confuso para os alunos, pelo que a tarefa deverá ser reformulada e simplificada, com a representação de menos triângulos e mais afastados para facilitar a visualização e distinção das retas contendo lados ou alturas dos triângulos. Quanto à área do triângulo, os alunos perceberam a relação com a área do retângulo, afirmando que uma correspondia a metade da outra mas tiveram muita dificuldade em representar esta relação algebricamente e encontrar a fórmula da área do triângulo partindo da fórmula da área do retângulo. A diversidade de nomenclaturas para os lados do retângulo pode ser um fator explicativo para esta dificuldade, já que os alunos relacionam a área do retângulo com o produto do comprimento pela largura mas não o produto da base pela altura. À semelhança dos estudos de Cavanagh (2008) e Tierney, Boy e Davis (1990) os alunos mostraram uma compreensão limitada da relação entre as áreas do retângulo e do triângulo, pois não deram uso ao facto da área do triângulo ser metade da de um retângulo com a mesma base e a mesma altura. João sugere que, para calcular a área do triângulo, à semelhança do retângulo, se multipliquem os lados. Como não esteve presente na aula onde foi discutida a relação entre a área do triângulo e do retângulo, não foi possível verificar se alterou a sua conjetura inicial, a fim de conseguir determinar a área do triângulo, dada a sua base e altura.

Relativamente à área do círculo, surgiram mais dificuldades. Na ficha de trabalho 6, os alunos relacionaram o círculo com um quadrado que tinha de lado a mesma medida que o raio do círculo mas demonstraram dificuldades a contar as quadrículas inteiras e com mais de metade da área colorida para estimarem a área do círculo. Alguns também confundiram raio e diâmetro, dificultando o estabelecimento de relações entre as figuras e a elaboração de conjeturas. Na discussão final da ficha conseguiram descobrir que a área do círculo era o triplo da área do quadrado e que esse valor era justificado pela presença da constante π mas as dificuldades surgiram quando tentei levar os alunos mais além, para que obtivessem a fórmula da área do círculo. A passagem do pensamento geométrico para o algébrico revelou-se muito difícil para os alunos.

Também na ficha de trabalho 7 esta dificuldade se verificou. Muitos alunos não conseguiram visualizar que a altura do retângulo formado correspondia ao raio do círculo e não conseguirem indicar como se calculava o perímetro do círculo, relacionando-o com a base do retângulo. Os alunos perceberam que o retângulo e círculo eram equivalentes porque tinha a mesma área mas não foram capazes de estabelecer relações entre as medidas das duas figuras, de modo a chegarem a uma fórmula. João também faltou à aula onde foi discutida a ficha de trabalho 6 e realizada e discutida a ficha de trabalho 7. Deste modo, não teve oportunidade de participar nos momentos em que este assunto foi trabalhado na turma. Pelo seu lado, Mariana, explorou as relações entre o círculo e o quadrado na ficha de trabalho 6 e as relações entre o retângulo e o círculo na ficha de trabalho 7, usando a fórmula da área do círculo com bastante destreza e sendo as suas intervenções nas discussões das tarefas muito importantes para a obtenção das conclusões pretendidas.

Depois da unidade de ensino. Nas questões relacionadas com a determinação da área de figuras, a percentagem de sucesso aumentou do teste diagnóstico para o final. Os alunos já revelam preocupação em contar as quadrículas do interior da figura para determinar a sua área. No que diz respeito ao cálculo da área de figuras dadas algumas medidas, no caso do retângulo, alguns alunos, embora em número reduzido, ainda usam uma abordagem aditiva. As dificuldades aumentam bastante na área do triângulo. Apesar de não ser tão notória a tentativa do cálculo do perímetro, cometem erros como multiplicar apenas a base pela altura do triângulo, multiplicar as três medidas indicadas na figura e tentar preencher o triângulo com quadrículas. No cálculo da área do círculo, cerca de $\frac{1}{5}$ dos alunos não fez qualquer tentativa de cálculo e cerca de 15% multiplicou π pelo raio. Numa das figuras do teste final o perímetro do círculo era igual à área e a maioria dos alunos não indicou a fórmula da área do círculo, não indicou qualquer unidade de medida ou apresentou a resposta em centímetros. Os alunos podem ter cometido o erro de calcular o perímetro do círculo em vez da sua área ou pensar que a área do círculo se obtinha multiplicando o diâmetro por π. Em situações futuras será de evitar nas tarefas a propor aos alunos representar um círculo com área igual ao perímetro.

Os resultados nas questões envolvendo o cálculo da área de figuras compostas também ficaram aquém das expetativas, tendo em conta o trabalho realizado ao longo da unidade de ensino. No entanto, houve melhorias no cálculo da área do retângulo e de figuras preenchidas com quadrículas, embora alguns alunos ainda confundam área e perímetro, especialmente no que respeita à indicação das unidades de medida. Tal refere Cavanagh (2008), em cujo estudo os alunos também confundiram área com perímetro, a evidência dessa confusão advém da etiquetagem inapropriada dos lados, em que os alunos usam "cm^2" ou na indicação das unidades de medida de área, onde os alunos usam “cm”, levando a crer que não compreenderam que as medidas convencionais de comprimento são lineares e que as de área são quadradas.

Para resolverem problemas onde é necessária a compreensão do conceito de área, os alunos mantiverem o desempenho, que revelou ser melhor quando as questões envolviam o preenchimento de figuras com unidades quadradas e não o comprimento dos lados. Foi possível verificar que os alunos compreendem melhor o conceito de área, apercebendo-se da forma como a figura é preenchida, do que memorizando uma fórmula. Na questão do teste final onde os alunos podiam relacionar a área do quadrado com a área do triângulo com a mesma base e altura, apenas 22% obteve sucesso, mas nenhum aluno tentou determinar o lado do quadrado para depois, através da fórmula, calcular a área do triângulo, o que vem consolidar a ideia de que os alunos mais facilmente relacionam a área das figuras do que memorizam a fórmula da área do triângulo.

Relativamente aos alunos estudo de caso, Mariana determina áreas de várias figuras, mesmo o triângulo e o círculo, em várias situações, com bastante destreza e indicando todos os cálculos efetuados. Já é capaz de usar fórmulas com compreensão e aplica o conceito de área em situações onde não é possível utilizar fórmulas. Faz a leitura correta das unidades de área do sistema métrico e continua a distinguir unidades de comprimento de unidades de área, usando-as corretamente. Na terminologia de Outhred e Mithelmore (2000), Mariana possui uma estrutura multiplicativa que a leva a compreender as fórmulas da área. Na aceção de Battista (2007), revela ter uma compreensão genuína de área pois compreendeu qual o atributo que estava a medir e o seu comportamento, usa processos numéricos para determinar a área, por exemplo do triângulo e do círculo, representando estes processos verbal e algebricamente. João já consegue determinar a área do retângulo e de figuras preenchidas com quadrículas mas não determina a área do triângulo e do retângulo, o que se pode dever ao facto de ter faltado às aulas onde estes assuntos foram trabalhados, o que o impediu de usar as fórmulas da área destas figuras com compreensão.

João também revelou melhorias no seu desempenho apesar de não ter tido tanto sucesso como Mariana. O aluno já compreende o conceito de área, aplicando-o em várias situações e atribui sentido ao facto das unidades de medida de área do sistema métrico serem o centímetro ou o metro quadrado. Distingue unidades de comprimento de unidades de área, usando-as corretamente. Comparando a sua prestação antes e depois da unidade de ensino, o trabalho efetuado durante a unidade de ensino, verifica-se que este foi crucial para o aluno melhorar o seu desempenho e a sua compreensão de área, dissociada de fórmulas previamente memorizadas.

7.2.3. Distinção entre perímetro e área

Antes da unidade de ensino. No teste diagnóstico os alunos foram diretamente questionados acerca da diferença entre área e perímetro. Apenas 30% dos alunos deu respostas próximas da resposta correta, referindo que a área é o que está "dentro" e perímetro é o que está "por fora" ou "à volta". Cerca de 20% dos alunos não expressou qualquer opinião e cerca de metade possui ideias erradas acerca destes dois conceitos. Apenas cerca de $\frac{1}{10}$ dos alunos julgava que figuras com a mesma área podiam ter perímetros diferentes, sendo esta outra evidência de que muitos confundem área com perímetro e dificilmente identificam qual a parte de uma figura correspondente à área e qual a correspondente ao perímetro, tal como no estudo de Randolph (2004).

Para os alunos estudo de caso, Mariana e João, perímetro e área são grandezas distintas e figuras com a mesma área podem ter perímetros diferentes. No entanto, estes alunos não fazem referência a figuras equivalentes. João, ao longo da primeira entrevista calculou a área de figuras come se estivesse a calcular o perímetro. Antes da unidade de ensino, o aluno confundiu com frequência as duas medidas e não reconheceu nem utilizou unidades de área, para além de usar unidades do sistema métrico em diversas situações.

Durante a unidade de ensino. Na ficha de trabalho 4, nas questões relativas ao perímetro, os alunos frisaram que se tratava da medida à volta da figura e nas questões da determinação da área, o seu interior. Nesta fase, os alunos mostraram melhorias na compreensão e distinção das noções de área e perímetro sem se centrarem numa fórmula mal compreendida ou sem se referiram ao retângulo. Construíram figuras equivalentes e congruentes, em diferentes posições, e alguns conseguiram decompor figuras para obter a sua área, em vez de contarem as quadrículas do seu interior, uma a uma. Nas tarefas em que a área e o perímetro foram estudados em simultâneo, Mariana continuou a distinguir as duas grandezas, mesmo em situações problemáticas e atingiu os objetivos propostos. Durante a unidade de ensino a aluna identificou figuras equivalentes e desenhou uma figura congruente numa posição diferente da figura inicial, revelando conhecer e aplicar as noções de equivalência e congruência de figuras planas.

Quanto a João, nas primeiras tarefas, ainda revelou algumas dificuldades em distinguir área de perímetro e revelou pouca destreza no cálculo destas grandezas, especialmente na realização da ficha de trabalho 2 mas, ao longo da unidade de ensino, foi consolidando as aprendizagens e superando as suas dificuldades. Por fim, tornou-se capaz de identificar e desenhar figuras equivalentes, embora a noção de congruência de figuras planas ainda não estivesse tão clara.

Depois da unidade de ensino. Considerando a melhoria dos resultados nos testes, no que respeita à determinação do perímetro e da área de figuras, verificamos que as tarefas propostas durante a unidade de ensino deram os seus frutos e levaram vários alunos a distinguir perímetro e área e determinar corretamente o seu valor. Os alunos identificaram figuras equivalentes e reconheceram que podiam não ter o mesmo perímetro mas ainda revelaram alguma dificuldade em distinguir figuras equivalentes de figuras congruentes. Para alguns alunos, como João, é possível que figuras congruentes sejam aquelas que têm a mesma área e mesmo perímetro, condições que não são suficientes para definir a congruência de figuras. No entanto no que respeita à construção de figuras congruentes, os alunos revelaram bom desempenho, mantendo a forma e tamanho da figura inicial e variando a sua posição.

Tanto Mariana com João revelam um bom desempenho no que diz respeito à distinção entre perímetro e área e mostram reconhecer figuras equivalentes. Ambos reconhecem que área e perímetro são grandezas distintas porque correspondem a medidas distintas, com unidades de medida também e, por isso mesmo, distintas.

Podemos concluir, à semelhança do que referem diversos autores indicados no Capítulo 2 desta investigação que o uso de ferramentas informáticas interativas e outras atividades práticas como a composição e decomposição de figuras, assim como a determinação da medida da área de figuras não retangulares em vez da memorização e aprendizagem de fórmulas sem compreensão permitiram aos alunos deste estudo minimizar as suas dificuldades e distinguir com maior clareza os conceitos de perímetro e área, a fim de determinar o seu valor, mesmo em situações problemáticas. O trabalho simultâneo com estes conceitos nalgumas tarefas também favoreceu a sua distinção.

7.3. Reflexão final

Em geometria, os conceitos de comprimento, perímetro e área são noções essenciais, não só na aula de Matemática como no nosso quotidiano. Para além das conclusões apresentadas, verifiquei que os alunos conseguem associar estas noções a situações da vida real e têm perceção da sua aplicabilidade e utilidade. Os conceitos de área e perímetro não constituem novidade para os alunos do 5.º ano mas são propensos a gerar dificuldades, nomeadamente no que respeita à sua distinção.

A investigação que realizei contribuiu não só para melhorar o conhecimento e aprendizagem dos alunos, ajudando-os a superar algumas das dificuldades reveladas e o modo como encaram e resolvem as tarefas que envolvem esses conceitos, como também constituiu um importante e relevante momento de aprendizagem para a mim própria, não só enquanto investigadora mas também, e essencialmente, como professora.

Enquanto investigadora pude vivenciar e experimentar todos os momentos, etapas e dificuldades inerentes à realização de um estudo/investigação desta natureza, o que me ajudou a dar resposta às questões inicialmente colocadas para poder perceber melhor as dificuldades dos alunos e encontrar um meio de os ajudar a superá-las. Ao realizar esta investigação foi possível compreender como elaborar um plano de investigação, analisar a literatura existente, organizar a metodologia de investigação, definindo instrumentos de recolha e análise de dados, de acordo com os objetivos do estudo. Também foi possível compreender os processos de análise de dados e sua utilidade para a elaboração das conclusões do estudo, embora esta tenha sido uma das maiores dificuldades que senti neste trabalho. Por exemplo, para diagnosticar as dificuldades dos alunos relativamente ao conceito de área, é difícil não referenciar as dificuldades relativas ao perímetro, dada a confusão que os alunos fazem entre estas duas medidas. Também foi difícil resumir os dados e registar o mais relevante e pertinente para o estudo que me ajudasse a responder às questões colocadas.

No processo de recolha de dados surgiram alguns contratempos que não foi fácil contornar. Foi bastante complicada a gestão do tempo, dos materiais e das salas, nomeadamente, com computadores. A sala de informática, com computadores disponíveis para os alunos só estava vaga um dia por semana, considerando o horário dos alunos, o que impossibilitou a conclusão de algumas tarefas com o recurso ao Geogebra e pode ter comprometido os resultados, que não foram tão bons quanto os esperados. O baixo rendimento escolar e dificuldades de aprendizagem da maioria dos alunos da turma, bem como a falta de empenho e apoio dos respetivos encarregados de educação, também podem ser fatores explicativos da fraca evolução dos alunos no que respeita à análise dos testes diagnóstico e final. Outro contratempo surgido diz respeito a um dos alunos estudo de caso, João, que durante a unidade de ensino não pôde estar presente em todas as aulas, o que não estava previsto aquando da sua escolha para integrar o estudo. Uma outra dificuldade sentida diz respeito à realização do diário de bordo. Tentei fazer o registo logo após as aulas, para que ficasse fiel às observações mais relevantes, mas dentro da sala de aula o meu papel de professora prevaleceu sobre o de investigadora e algumas observações e intervenções dos alunos podem-me ter escapado. Apesar de ter filmado todas as aulas, no meio da confusão gerada na realização e discussão das tarefas, nem sempre foi possível identificar os alunos que intervinham nas discussões ou registar o desempenho de todos os grupos.

Enquanto professora este estudo foi, sem dúvida, uma mais-valia, na medida em que me permitiu aprender mais e refletir de modo mais aprofundado sobre o desempenho e dificuldades dos alunos na aprendizagem de perímetro e área. A realização desta investigação deu-me elementos "preciosos" para a minha prática pedagógica e suscitou a minha curiosidade e atenção para a atividade realizada pelos meus alunos. O tipo de reflexão realizada quer antes, durante e após a investigação, ao preparar e reformular tarefas e ao analisar os resultados obtidos nas várias entrevistas, bem como as minhas interações com os alunos, contribuíram para uma maior consciencialização e compreensão da sua aprendizagem neste tema. Também despertou o meu interesse e curiosidade para a aprendizagem de outros temas de Matemática no sentido de motivar os meus futuros alunos, para aprenderem Matemática com gosto e compreensão.

Esta investigação, ao contribuir para melhorar o conhecimento da aprendizagem dos conceitos de perímetro e área por estes alunos é de interesse para professores de Matemática e investigadores em Educação Matemática, que podem usar ideias que recriei ou que surgiram no estudo e melhorá-las, experimentando-as com outros alunos. O estudo sugere uma abordagem de perímetro e área enfatizando a compreensão destes conceitos, combinando experiências com e sem recurso ao computador, neste caso, o programa de geometria dinâmica Geogebra. É orientado para o ensino do conceito de área e perímetro de modo mais integrado, colocando menos importância no mero cálculo com fórmulas (Kordaki & Potari, 1998). Enfatiza a exploração dos conceitos e não apenas a aplicação de fórmulas (Chappell & Tompson, 1999). Sugere, ainda, que os alunos aprendam acerca do uso de ferramentas de medição como das fórmulas, desenvolvendo a compreensão do uso apropriado das unidades de medida (Battista, 2007).

Referências

Abrantes, P, Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: ME-DEB.

Amado, N., & Carreira, S. (2008). Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de Matemática: Diferenças na prática da sala de aula. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 286-299). Lisboa: SEM-SPCE.

Anderson, G., & Arsenault, N. (2002). *Fundamentals of educational research* (2.ªedição). London: The Falmer Press.

Andresen, M., & Misfeldt, M. (2010). Essentials of Teacher Training Sessions with GeoGebra. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 17*(4), 169-176.

APM (2009). *Renovação do Currículo de Matemática: Seminário de Vila Nova de Milfontes 1988.* Edição comemorativa. Lisboa: APM.

Barrett, J. & Clements, D. H. (2003). Quantifying Path Length: Fourth-Grade Children`s Developing Abstractions for Linear Measument. *Cognition and Instruction*, 21(4), 475-520.

Battista, M. T. (2004). Applying Cognition-Based Assessment to Elementary School Students` Development of Understanding of Area and Volume Measurement. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 185-204.

Battista, M. (2006). Understanding the development of students' thinking about length. *Teaching Children Mathematics*, 13(3), 140–147.

Battista, M. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Eds), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 843-908). NCTM.

Baturo, A. & Nason, R. (1996). Student Teachers' Subject Matter Knowledge within the Domain of Area Measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31(3), 235-268.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H. Oliveira, P. (2011). *Geometria e Medida no Ensino Básico.* ME: DGIDC. http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/home.htm

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Bransford, J., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (Eds.). (1999). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and Schoo*l. Washington, D.C.: National Academy Press.

Cavanagh, M. (2008). Area Measurment in year 7. *Reflections, 33(1),* 55-58. Retirado em 25 de outubro de 2012 de:

http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/secondary/mathematics/assets/pdf/s4_teach_ideas/area/area_meas.pdf

Candeias, N, & Ponte, J. P. (2008). Aprender geometria utilizando um ambiente de geometria dinâmica. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 313-326). Lisboa: SEM-SPCE.

Carmo, H., & Ferreira, M. F. (1998). *Metodologia da investigação: Guia para a autoaprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.

Chappel, M.F., Thompson, D. R. (1999). Perimeter or Area? Which Measure Is It? *Mathematics Teaching in the Middle School*, 5(1), 20-23.

Clements, D. H., Battista, M. T., Sarama, J., Swaminathan, S. & McMillen, S. (1997). Student`s Development of Length Concepts in a Logo-Based Unit on Geometric Paths. *Journal for Research in Mathematics Education, 28(1),* 70-95.

Coelho, M. I: & Saraiva, M. J. (2002). Tecnologias no Ensino/Aprendizagem da Geometria. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho & J. M. Matos (Org.), *Ensino e Aprendizagem da Geometria.* (pp. 157-184). Lisboa: SEM-SPCE.

Curry, M., Mitchelmore, M. & Outhred, L. (2006). Development of Children's Understanding of Length, Area, and Volume Measurement Principles. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 377-384). Vol.2. Prague: PME.

Costa, C. (2002). Visualização, veículo para a educação em geometria. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho & J. M. Matos (Org.), *Ensino e Aprendizagem da Geometria.* (pp. 157-184). Lisboa: SEM-SPCE.

Durão, E. G., Baldaque, M. M. (2010). *MATemática – Matemática 5.º Ano*. Lisboa: Texto Editores.

Erikson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.) *Handbook of research on teaching.* (pp. 119-161). Nova Iorque: MacMillan.

Gay, L. R., Mills, G. E., & Airasian, P. (2006). *Educational research: Competencies for analysis and applications* (8.ª edição). Upper Saddle River: Pearson.

Hohenwarter, M., Jarvis, D. H., & Lavicza, Z. (2009). Linking geometry, algebra, and mathematics teachers: GeoGebra software and the establishment of the International GeoGebra Institute. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 16*(2), 83-87.

Kidman, G. C. (1999). Grde 4, 6 and 8 Students`Strategies in Area Measument. In J. M. Truran & K. M. Truran (Eds), Making the Difference (Proceedings of the 22nd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, pp. 298-305). MERGA, Adelaide. Retirado em 26 de outubro de 2012 de

http://www.merga.net.au/documents/RP_Kidman_1999.pdf

Kordaki, M. & Potari, D. (1998). Children`s Approaches to Area Measurement Through Different Contexts. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(3), 303-316.

Kordaki, M. & Potari, D. (2002). The effect of Area Measurement Tools on Student Strategies: The Role of a Computer Microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 65-100.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabry-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6(3),* 283-317.

Laborde, C., Kynigos, C, Hollebrands, K. & Strässer, R. (2006).Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 275-303). SensePublishers: Rotterdam.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1994). *Investigação qualitativa: Fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Loureiro, C. (1999) Computadores no ensino da geometria. In P. Abrantes, H. Fonseca, J. P. Ponte, & E. Veloso, (Orgs) *Ensino da Geometria no virar do milénio* (pp.43-50). Lisboa: DEFCUL.

Ma, L. (1999). Knowing and Teaching Elementary mathematics. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Matos, J. F., & Carreira, S. P. (1994). Estudos de caso em educação matemática: Problemas actuais. *Quadrante, 3*(1), 19-53.

Matos, J. F. (2008).Mediação e colaboração na aprendizagem em Matemática com as TIC. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 76-88). Lisboa: SEM-SPCE.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* Lisboa: DGIDC.

http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/index.php?s=directorio&pid=29&ppid=3

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Nunes, T. Light, P. Mason, J. & Allerton, M. (1994). The Role of Symbols in Structuring Reasoning: Studies About the Concept of Area. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds). *Proceedings of the 18th PME International Conference, 3*, 255-262.

Nunes, T. Light, P. Mason, J. (1993). Tools for Thougth: the Measument of Length and Area. *Learning and Instruction, 3 (1),* 39-54.

Oliveira, H., & Domingos, A. (2008). *Software* no ensino e aprendizagem da Matemática: algumas ideias para discussão. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 98-109). Lisboa: SEM-SPCE.

Outhred, L. N. & Mithelmore, M. C. (2000) Young Children´s Intuitive Understanding of Rectangular Area Measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, 31(2),* 144-167.

Owens, K. & Outhred, L. (2006). The Complexity of Learning Geometry and Measurement. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 83-115). SensePublishers: Rotterdam.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *BOLEMA*, *25*, 105-132.

Ponte, J. P. (2008). Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. *PNA*, *2*(4), 153-180.

Schoenfeld, A. (1988). When Good Teaching Leads to Bad Results: The disasters of Well Taugth Mathematics Classes. *Educational Psychologist*, *23, 145-166.*

Sequeira, A. F., Andrade, A. P., Almeida, C., Beja, E. (2010). *Olá, Matemática! – Matemática 5.º Ano.* Porto: Porto Editora.

Sherman, H. & Randolph, T. (2004). Area and Perimeter: "Which is Which and How do We Know?". *Research for Educational Reform*, 9(3), 25-36.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77, 20-26.* Reprinted in *Arithmetic Teacher (1978)* (pp. 9-15).

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum. Retirado de:

http://pat-thompson.net/PDFversions/2000TchExp.pdf

Tierney, C. Boyd, C. & Davis, G. (1990). Prospective Primary Teachers`Conceptions of Area. In G. Booker. P. Coob & T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th PME International Conference, 2*, 307-315.

Velichová, D. (2011). Interactive Maths with GeoGebra. *International Journal of Emerging Technologies In Learning*, 6 (1), 631-35.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Yew, W., Zamri, S., Lian, L. (2011). Preservice Secondary School Mathematics Teachers`Subject Matter Knowledge of Calculating Perimeter and Area. *Academic Research International*, 1(2), 276-285.

Anexos

Anexo 1

Planificação da Unidade de Ensino

	Aulas previstas: 11 blocos de 90 minutos					
Fichas de trabalho	**Tópicos**	**Objetivos/Capacidades a desenvolver**	**Natureza das tarefas**	**Modo de trabalho**	**Duração em min.**	**Blocos**
Teste Diagnóstico	Perímetros e áreas.	• Diagnosticar o conhecimento dos alunos sobre áreas e perímetros antes da unidade de ensino.	Problemas e exercícios	Individual	45	0,5
Ficha de trabalho 1	Perímetros: polígonos regulares e irregulares. Equivalência de figuras planas.	• Determinar o perímetro de polígonos regulares e irregulares; • Resolver problemas envolvendo perímetros de polígonos e do círculo; • Compreender a noção de equivalência de figuras planas e distinguir figuras equivalentes e figuras congruentes; • Calcular a área e o perímetro de figuras planas simples.	Tarefas de exploração	Pares	90	1
Ficha de trabalho 2	Perímetros e áreas. Relações e regularidades.	• Determinar o perímetro de polígonos regulares; • Identificar sequências e regularidades numéricas e não numéricas; • Representar simbolicamente relações descritas em linguagem natural e reciprocamente;	Tarefas de investigação	Grupos de 3 ou 4 alunos	180	2

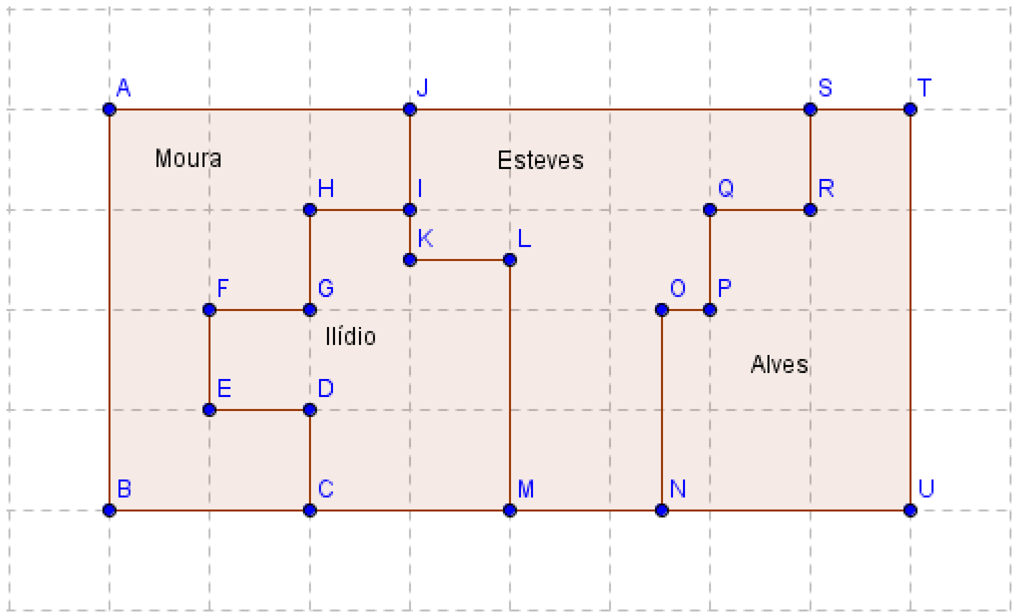
		• Interpretar diferentes representações de uma relação e relacioná-las.				
Ficha de trabalho 3	Polígonos regulares e irregulares. Área do triângulo.	• Determinar o perímetro de polígonos regulares; • Compreender a noção de equivalência de figuras planas e distinguir figuras equivalentes e figuras congruentes; • Relacionar a fórmula da área do triângulo com a do retângulo; • Calcular a área de figuras planas simples, decomponíveis em retângulos e em triângulos ou por meio de estimativas.	Tarefas de exploração	Pares	135	1,5
Ficha de trabalho 4	Perímetros. Áreas: equivalência de figuras planas; unidades de área e área do triângulo.	• Determinar o perímetro de polígonos regulares e irregulares; • Resolver problemas envolvendo perímetros de polígonos; • Resolver problemas que envolvam áreas do triângulo, bem como a decomposição de outras figuras planas; • Calcular a área de figuras planas simples, decomponíveis em retângulos e em triângulos ou por meio de estimativas; • Distinguir figuras equivalentes de figuras congruentes.	Problemas e exercícios	Individual	135	1,5
Ficha de trabalho 5	Perímetros: círculo.	• Determinar um valor aproximado de π; • Resolver problemas envolvendo perímetro do círculo.	Tarefas de exploração	Pares	90	1

Ficha de trabalho 5A	Perímetros: círculo.	• Resolver problemas envolvendo perímetro do círculo.	Problemas e exercícios	Individual	90	1
Ficha de trabalho 6	Áreas: área do círculo.	• Determinar valores aproximados da área de um círculo desenhado em papel quadriculado; • Resolver problemas que envolvam áreas do círculo.	Tarefas de exploração e exercícios	Pares	90	1
Ficha de trabalho 7	Áreas: área do círculo.	• Compreender a noção de equivalência de figuras planas; • Calcular a área de figuras planas simples decomponíveis em retângulos e triângulos; • Relacionar a fórmula da área do retângulo com a do círculo.	Tarefas de exploração	Pares	90	1
Teste Final	Perímetros e áreas.	• Avaliar as aprendizagens desenvolvidas durante a unidade de ensino.	Problemas e exercícios	Individual	45	0,5

Anexo 2

Ficha de Trabalho N.º 1 – Nasceu uma nova aldeia

Duas aldeias vizinhas passaram a pertencer a 4 famílias como mostra a figura:



Lê com a tenção o diálogo entre dois proprietários:

Moura: - *Caro Alves, vou vedar o meu terreno para o proteger dos ventos.*

Alves: - *Também estou a pensar fazer o mesmo.*

Moura: - *Como os nossos terrenos têm a mesma área, então poderíamos comprar a rede em conjunto e depois dividíamos a despesa a meio. O que achas?*

Alves: - *Deixa-me pensar! Vou falar com a minha esposa e depois dou-te uma resposta.*

Moura: - *Preciso que tomes uma decisão já! Pois vou comprar a rede agora mesmo!*

1 – Que decisão deve o senhor Alves tomar? (Justifica a tua resposta)

(Prolongamento da tarefa)

2 – Qual das famílias poderia dividir igualmente a despesa com o Sr. Moura de modo a que ninguém fique prejudicado?

Anexo 3

Ficha de Trabalho N.º 2 – Retângulos e mais retângulos

1 – Investiga o que acontece à medida da área de um retângulo quando se alteram o comprimento e a largura mas não se altera o perímetro.

Sugestão:

Preenche uma tabela como a seguinte:

Perímetro	**Comprimento**	**Largura**	**Área**

2 – Investiga o que acontece à medida da área e do perímetro de um retângulo quando de duplicam as medidas do comprimento e largura.

Sugestão:

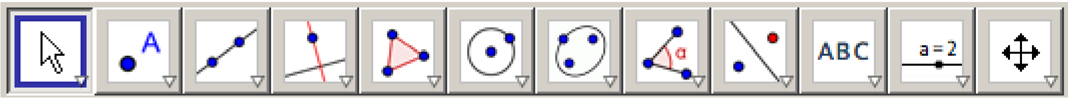
Preenche uma tabela como a seguinte:

Retângulos	**Comprimento**	**Largura**	**Área**	**Perímetro**
Situação inicial				
Dimensões anteriores multiplicadas por 2				
Dimensões anteriores multiplicadas por 2				

Anexo 4

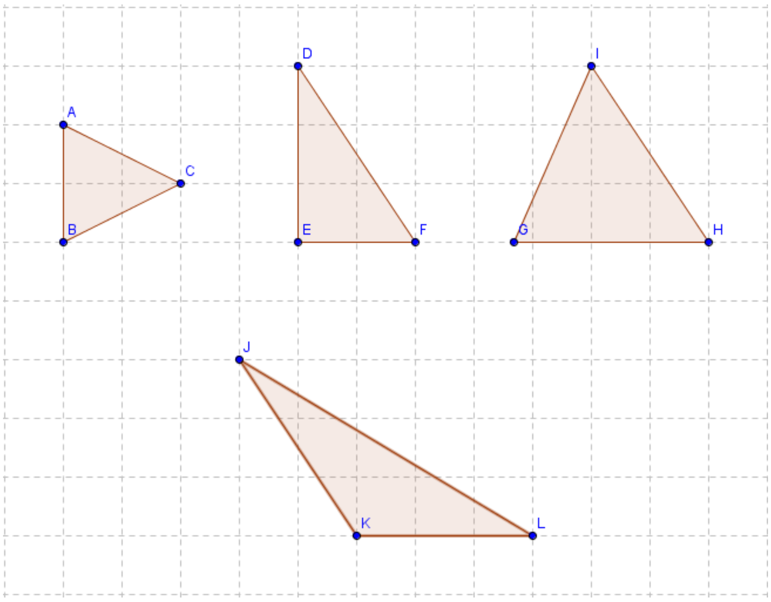
Ficha de Trabalho N.º 3 – Triângulos e mais triângulos

Nesta ficha vais usar o *Geogebra*. Para isso deves seguir as instruções que te são dadas. Com a ajuda do rato e com os botões da barra de ferramentas vais construir figuras sobre a *janela de gráficos*.



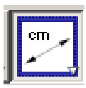
Tarefa 1 - Alturas do triângulo

1 – Observa os seguintes triângulos:



a) Classifica os triângulos quanto ao comprimento dos seus lados.

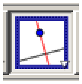
b) Classifica os triângulos quanto à amplitude dos seus ângulos.

c) Determina o perímetro dos triângulos, selecionando a opção 

Clica sobre o perímetro de cada um dos triângulos. Obténs a medida do comprimento do perímetro.

- **Chamamos altura de um triângulo à distância, medida na perpendicular, entre um vértice e o lado oposto ou o seu prolongamento.**

d) Traça as alturas dos triângulos.

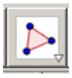
- Seleciona a opção  e clica sobre *Retas perpendiculares*. De seguida

clica num vértice e no lado oposto a esse vértice. Obténs uma reta perpendicular ao lado indicado que contém a altura do triângulo. Repete este procedimento para todos os lados do triângulo e para todos os triângulos.

e) Será que consegues traçar o mesmo número de alturas em qualquer triângulo? Porquê?

Tarefa 2 – Do retângulo ao triângulo

1 – Constrói um retângulo de 4 x 2.

- Seleciona a opção  . Clica em quatro pontos na *janela de gráficos*, que

correspondem aos quatro vértices do retângulo e volta a clicar no primeiro ponto. Obténs o retângulo.

Qual a área do retângulo?

a) Dentro do retângulo, constrói triângulos que tenham a mesma base e a mesma altura do retângulo.

- Repete o procedimento anterior mas seleciona apenas três pontos (os três vértices do triângulo).

b) Preenche a tabela.

	Medida da Base	**Medida da Altura**	**Medida da Área**
Triângulo			
Triângulo			
Triângulo			

c) Que relação existe entre a área de cada um dos triângulos e a área do retângulo?

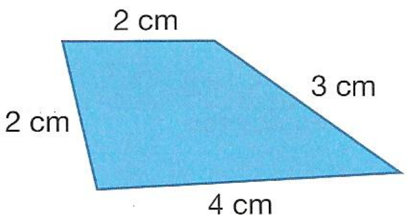
d) Realiza as questões anteriores para outro retângulo com dimensões à tua escolha.

Anexo 5

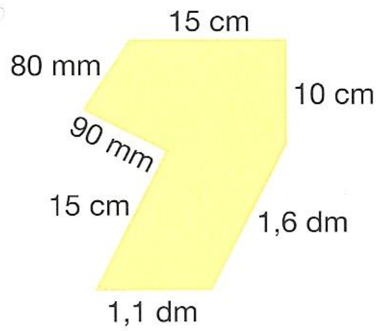
Ficha de Trabalho N.º 4

1 – Determina, em centímetros o perímetro dos polígonos seguintes.

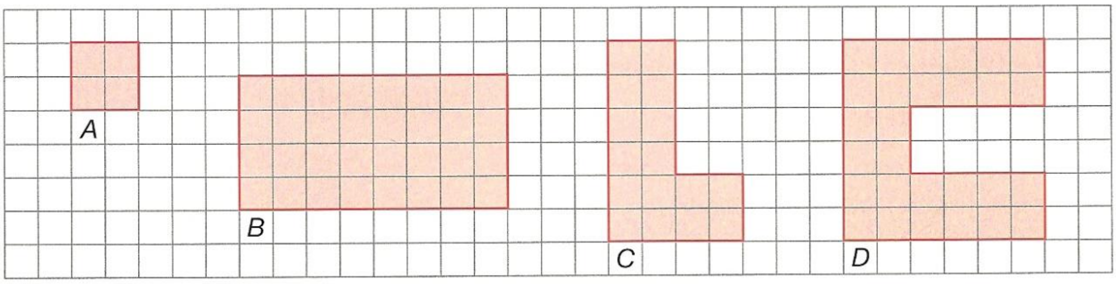
a)



b)



2 – Observa as figuras.

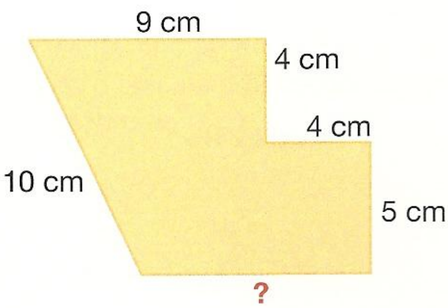


Determina o perímetro de cada figura tomando como unidade de medida:

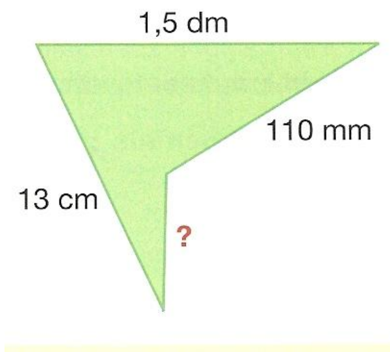
a) o lado de uma quadrícula; b) o lado do quadrado A.

3 – O perímetro de cada um dos polígonos é 45 cm. Determina a medida desconhecida.

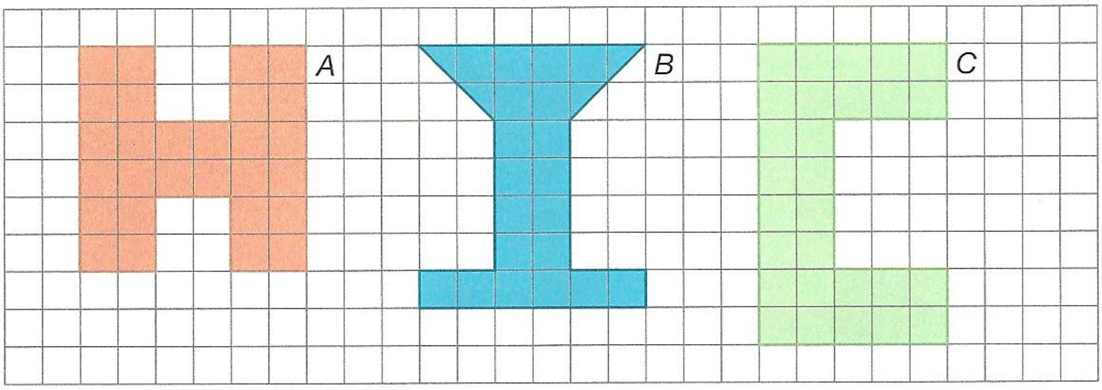
a)



b)



4 – Observa as figuras.

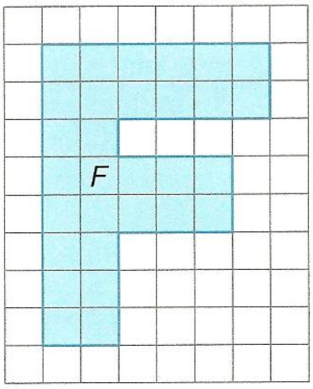


Tomando como unidade a área de cada quadrícula indica:

a) a área das figuras;

b) duas figuras equivalentes.

5 – Observa a figura.



Desenha:

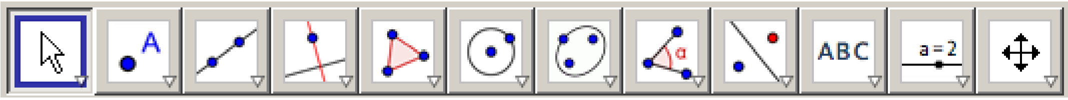
a) uma figura congruente à figura F;

b) duas figuras equivalentes à figura F e que não tenham a mesma forma.

Anexo 6

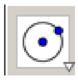
Ficha de Trabalho N.º 5 - À descoberta do π e perímetro do círculo

Nesta tarefa vais usar o *Geogebra*. Para isso deves seguir as instruções que te são dadas. Com a ajuda do rato e com os botões da barra de ferramentas vais construir figuras sobre a *janela de gráficos*.

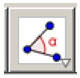


1 – Constrói uma circunferência de centro C e mede o seu perímetro.

Para isso,

- Traça uma circunferência, selecionando, com um clique do rato, o  botão e de seguida, a opção *Circunferência (centro, ponto).*

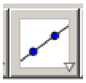
  Marca o centro da circunferência e, arrastando o rato, volta a clicar, de modo a aparecer uma circunferência;

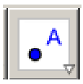
- Mede o comprimento da circunferência (perímetro), selecionando o botão  e, de seguida, a opção *Distância ou comprimento*.

  Clica sobre a circunferência e obténs o seu perímetro.

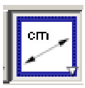
2 – Desenha um diâmetro [CB] dessa circunferência e mede o seu comprimento.

Para isso,

- Traça uma reta, escolhendo o botão  e clicando sobre o centro e um ponto da circunferência.

- Obtém um diâmetro, selecionando o botão  e, de seguida, a opção *Interseção de dois objetos*.

  Clica sobre os pontos de interseção da reta traçada com a circunferência.

- Mede o comprimento do diâmetro da circunferência, selecionando a opção 

Clica sobre os pontos de interseção da reta com a circunferência. Obténs o comprimento do diâmetro.

3 – Designando por P o perímetro da circunferência e por d o comprimento do diâmetro dessa circunferência, calcula o quociente P : d.

- Para calcular o quociente **P : d**, escreve na linha de *Entrada* - perímetroc/distânciaCB. Em seguida, carrega em ENTER.

4 – Move o ponto B, usando a ferramenta  e regista os valores encontrados na tabela seguinte.

Círculo	**Diâmetro (d)**	**Perímetro (P)**	**P : d**
Círculo 1			
Círculo 2			
Círculo 3			
…			

5 – Que relação existe entre o perímetro e o diâmetro de um círculo?
Regista as tuas conclusões.

Anexo 7

Ficha de Trabalho N.º 5 A

1 – Indica das afirmações seguintes as verdadeiras e as falsas e justifica porque as consideraste falsas. (Usa 3,14 como valor aproximado de π.)

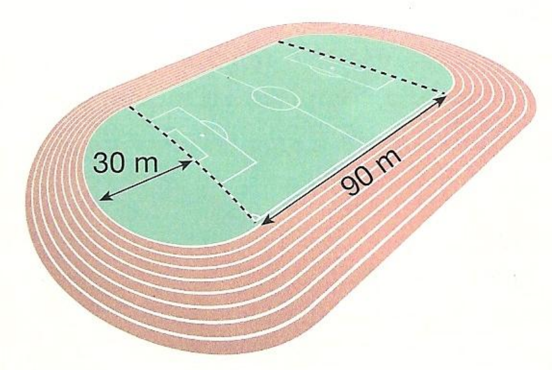
a) Num círculo de raio 2 cm, o diâmetro é 1 cm.

b) Num círculo de raio 2 cm, o perímetro é 12,56 cm.

c) Num círculo de diâmetro 5 cm, o raio é 2 cm.

d) Se o perímetro de um círculo é 31,4 cm, o seu diâmetro é 11 cm.

2 – Os treinos de atletismo da turma do André realizam-se numa pista com o formato e as medidas apresentadas na figura.



Numa aula, o professor de Educação Física pediu que todos os alunos dessem duas voltas à pista mais próxima do relvado. Calcula a distância percorrida por cada um dos alunos da turma do André. (Usa 3,14 como valor aproximado de π.)

3 – Calcula o comprimento das linhas vermelhas em cada uma das figuras, supondo que cada quadrícula tem 1 cm de lado. (Usa 3,14 como valor aproximado de π.)

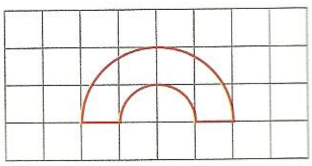


Figura A

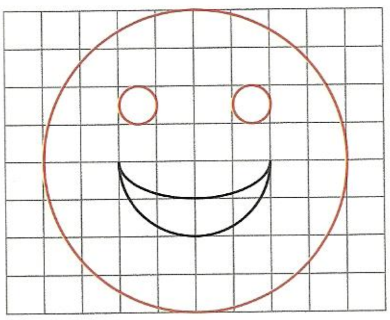
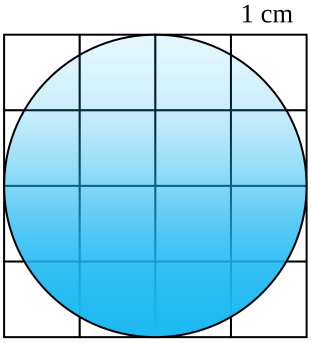


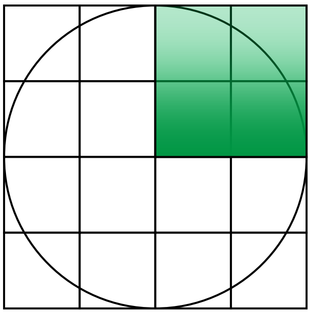
Figura B

Anexo 8

Ficha de Trabalho N.º 6 – Círculos e quadrados

1 – Por contagem de quadrados de 1 cm^2:





a) Estima a área do círculo azul (conta o número de quadrados azuis com 1 cm^2 e com mais de 0,5 cm^2);

b) Calcula a área do quadrado verde;

c) Compara o raio do círculo com o lado do quadrado verde;

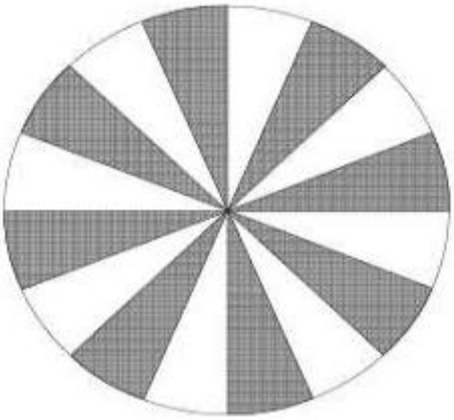
d) Compara a área estimada do círculo azul com a área do quadrado verde. O que observas?

e) Repete a atividade para outros círculos com raios diferentes, à tua escolha.

Anexo 9

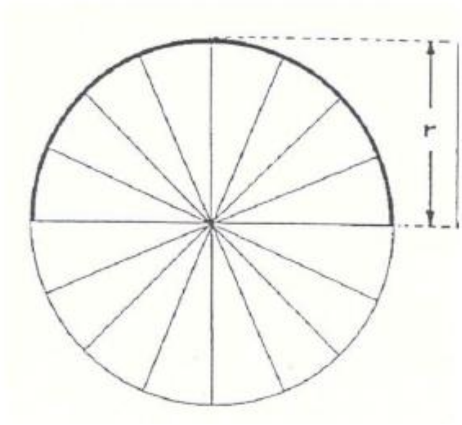
Ficha de Trabalho N.º 7 – Círculos, retângulos e áreas

O círculo encontra-se dividido em 16 setores iguais.



Recorta os setores que compõem o círculo.

Cola os setores encaixando-os alternadamente, como mostra o esquema:



Observa a figura obtida e compara-a com o círculo.

Em relação às áreas das duas figuras obtidas, que conjeturas pode formular?

Anexo 10

Pedido de Autorização ao Diretor do Agrupamento

Exmo. Sr. Diretor do Agrupamento
de Escolas São Vicente - Telheiras

Eu, Cláudia Luísa de Matos Lopes, professora contratada do grupo 230 da Escola Básica São Vicente - Telheiras, encontrando-me a realizar a dissertação no âmbito do Mestrado em Educação na Especialidade de Didática da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, venho por este meio solicitar autorização para realizar a investigação nas instalações da escola com utilização da sala de informática durante o 2.º e 3.º período.

Os dados recolhidos serão utilizados exclusivamente para a realização da dissertação, cujo principal objetivo é perceber de que modo o trabalho com perímetros e áreas recorrendo ao software de geometria dinâmica – *GeoGebra* – pode contribuir para a compreensão das noções de perímetro e de área em alunos do 5.º ano.

Agradecendo desde já a atenção dispensada, solicito deferimento.

Lisboa, _____ de janeiro de 2013

Anexo 11

Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação

Exmº(ª) Sr(a) Encarregado(a) de Educação

No âmbito do Mestrado em Educação na Especialidade de Didática da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, estou a desenvolver um estudo que tem como objetivo perceber de que modo o trabalho com perímetros e áreas recorrendo ao software de geometria dinâmica – *GeoGebra* – pode contribuir para a compreensão das noções de perímetro e de área em alunos do 5.º ano.

Para o efeito necessito de observar e recolher dados sobre o trabalho dos alunos durante cerca de 10 aulas sobre o tema "Áreas e perímetros", que decorrerão no 2.º e 3.º período. A recolha de dados basear-se-á na gravação em vídeo e áudio das aulas, bem como em entrevistas a alunos, feitas em horário extracurricular, de modo a compreender melhor o que os alunos sentiram face às tarefas propostas e tentando clarificar algum aspeto menos explícito das gravações.

Face ao exposto solicito autorização para proceder à recolha de dados, junto do seu educando, comprometendo-me desde já a garantir o anonimato dos alunos e a confidencialidade dos dados obtidos que serão utilizados apenas no âmbito da referida investigação, por mim e pelo meu supervisor, e para divulgação de resultados em encontros de natureza científica.

Agradecendo desde já a atenção dispensada, apresento os meus melhores cumprimentos.

_________________________, _____ de janeiro de 2013

A professora de Matemática

____

(Cláudia Lopes)

✂---

Autorizo/ Não Autorizo que meu (inha) educando(a)____________________________

nº ___ turma ___ 5º ano, a participar na recolha de dados dirigida pela professora Cláudia Lopes, no âmbito do seu estudo de Mestrado.

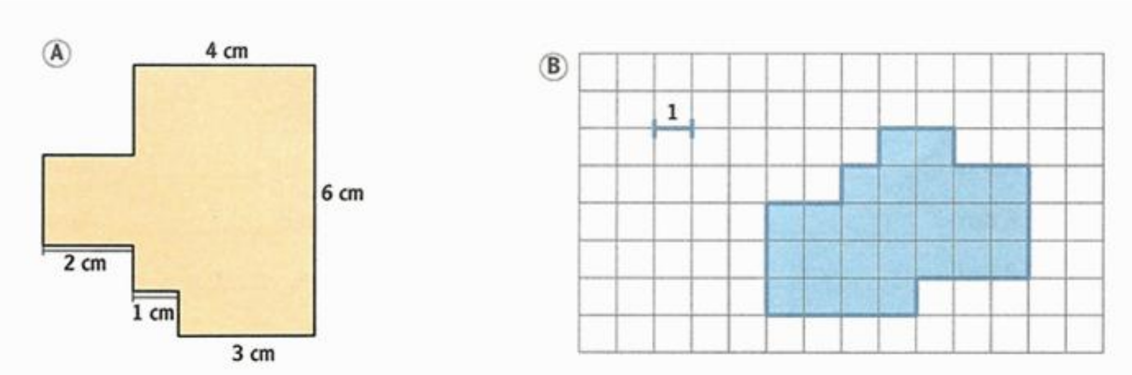
Data: ________________________________

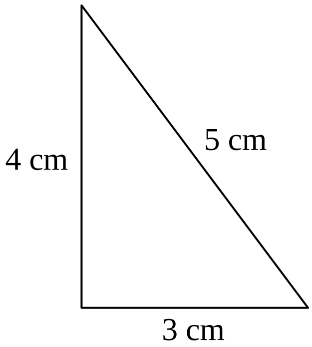
Assinatura: ____________________________________

Anexo 12

Teste Diagnóstico

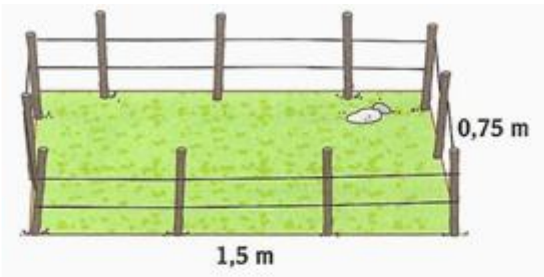
1 – Determina o perímetro de cada uma das seguintes figuras.



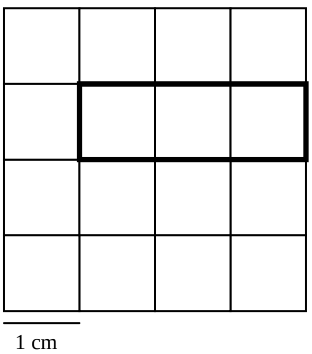


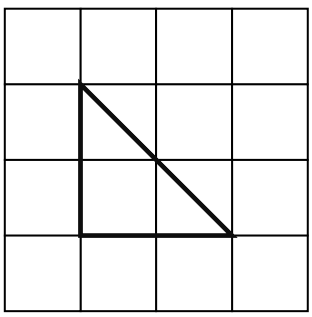
2 – Sabendo que a medida do comprimento de um quadrado é 5,2 cm, calcula o seu perímetro.

3 – Será que 2,5 m de rede são suficientes para vedar o terreno retangular da figura. Explica a tua resposta.

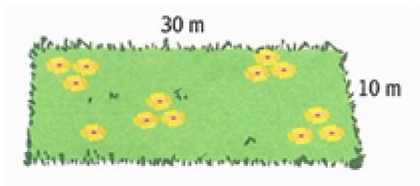


4 – Determina a área das figuras.





5 – Determina a medida da área do jardim.



6 – Desenha uma figura cujo perímetro seja 24 unidades.

7 – Desenha uma figura cuja área seja 24 unidades quadradas.

8 – Qual a diferença entre área e perímetro? Como é que sabes?

____

____

____

____

____

9 – Será que duas figuras podem ter a mesma área mas perímetros diferentes? Explica a tua resposta.

____

____

____

____

Anexo 13

Guião da Primeira Entrevista

Registo da data e hora do início da gravação.

Tarefas – 1.ª Entrevista

Agora que já resolveste todas as tarefas do teste diagnóstico, apresenta todo o teu raciocínio, explicando, também, **oralmente** o modo como pensaste, em cada uma delas (utiliza esquemas, desenhos, cálculos, etc., para explicar como encontraste a resposta).

Questões finais

- Qual o teu nome?
- Que idade tens?
- Como foi o teu percurso escolar?
- Já repetiste algum ano? Qual?
- Como foi o teu percurso em relação à Matemática?
- Como te sentes este ano, nesta disciplina?
- Consideras-te um bom, médio ou fraco aluno a Matemática? Porquê?
- Pensas que poderias ser melhor aluno? Então o que modificarias?
- Quando te colocam perante uma tarefa nova como é que te sentes?
- Como trabalhas melhor: em grupo, com o colega do lado ou individualmente? Porquê?
- Como vês as aulas em que se realiza a discussão das resoluções das tarefas?
- Qual das tarefas gostaste mais de resolver? Porquê?
- Quais foram as principais dificuldades que sentiste neste trabalho?

Anexo 14

Matriz do Teste Diagnóstico/1.ª Entrevista

Questão	Tópico	Objetivos específicos	Objetivos do PMEB
1 a)	Perímetros: polígonos regulares e irregulares	Determinar o perímetro de polígonos irregulares.	Determinar o perímetro de polígonos.
1 b)			
1 c)			
2		Determinar o perímetro de polígonos regulares.	
3		Identificar e calcular a medida do perímetro.	Resolver problemas envolvendo perímetros de polígonos.
6	Perímetro	Compreender o conceito de perímetro.	
4 a)	Área	Calcular a área de figuras.	
4 b)			Calcular a área de figuras planas simples.
5			
7	Área	Compreender o conceito de área.	Resolver problemas que envolvam áreas.
8	Área/Perímetro	Distinguir área de perímetro.	-
9	Áreas: Equivalência de figuras planas	Reconhecer figuras equivalentes.	Compreender a noção de equivalência de figuras planas e distinguir figuras equivalentes de figuras congruentes.

Anexo 15

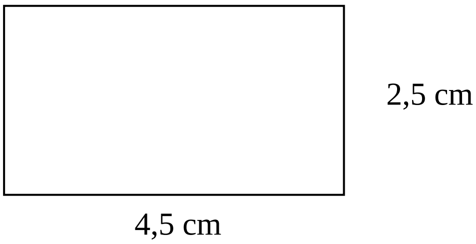
Guião da Segunda Entrevista

Registo da data e hora do início da gravação.

Tarefas – 2.ª Entrevista

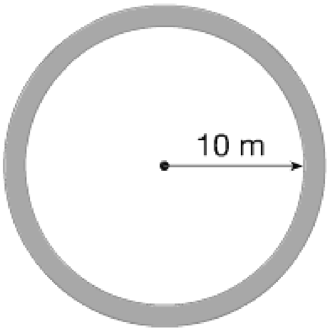
Ao longo da resolução das tarefas que se seguem, apresenta todo o teu raciocínio, explicando, também, **oralmente** o modo como estiveres a pensar, em cada uma delas (utiliza esquemas, desenhos, cálculos, etc., para explicar como encontraste a resposta).

1 – Determina o perímetro da figura.

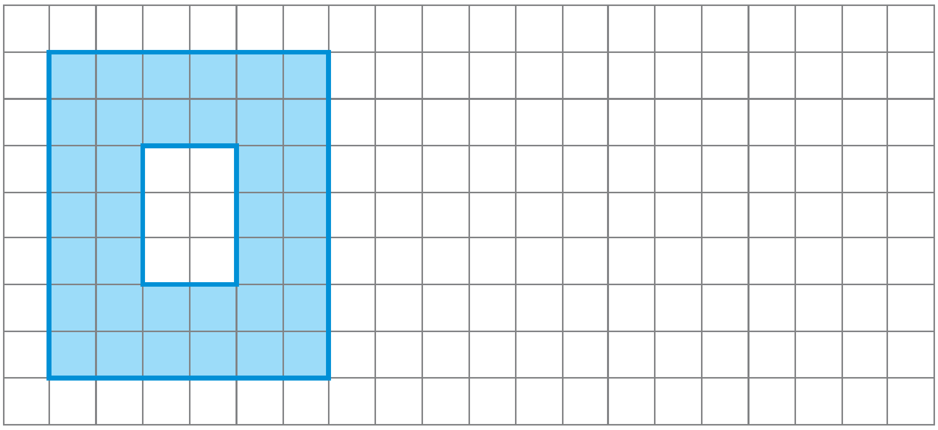


2 – Dois campos têm perímetros iguais; um é um retângulo de 120 m por 80 m, e o outro é um quadrado. Quanto mede o lado do quadrado?

3 – A figura representa uma pista circular onde três amigos foram correr. O Pedro deu duas voltas completas à pista, a Maria deu duas voltas e meia e a Joana deu apenas uma volta. Quantos metros correu, aproximadamente, cada amigo?

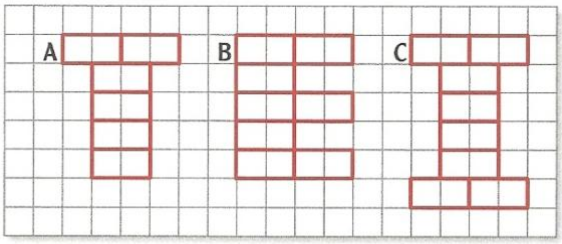


4 – Observa a figura que se segue.



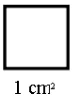
4.1 – Desenha uma figura equivalente à dada mas com menor perímetro.

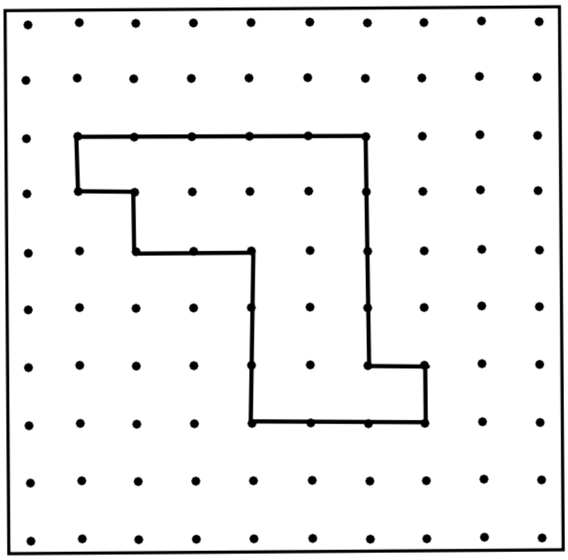
5 – Considera as figuras.



5.1 – Existem figuras congruentes? Justifica a tua resposta.

6 – Determina a área da figura.

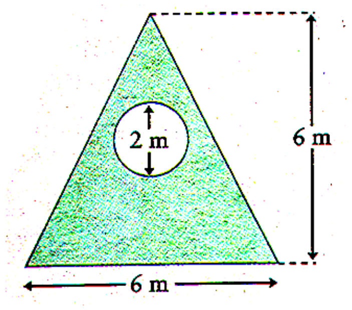




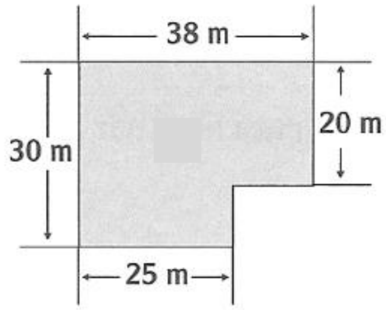
7 – Calcula a área de um círculo com 5 cm de raio.

8 - Determina a área da parte sombreada das figuras:

a)



b)



9 – Se uma sala quadrangular tem 25 m^2 de área, qual o seu perímetro?

Questões finais

- Qual das tarefas gostaste mais de resolver? Porquê?
- Quais foram as principais dificuldades que sentiste neste trabalho?
- Relembra as tarefas que efetuaste ao longo das últimas aulas. Qual a tarefa que mais gostaste de resolver?
- Qual a tarefa onde sentiste mais dificuldades? Porquê?
- Ainda sentes alguma dificuldade ou dúvida no que diz respeito ao tema perímetros? E no que diz respeito às áreas?

Anexo 16

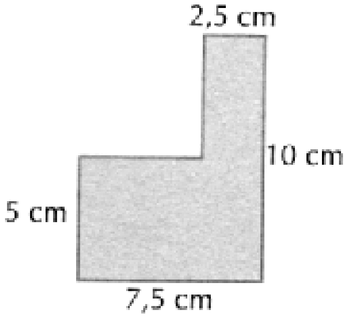
Matriz da 2.ª Entrevista

Questão	Tipo de questão	Tópico	Objetivo
1	Calcular o perímetro de figuras.	Perímetros: polígonos regulares e irregulares	Determinar o perímetro de polígonos regulares e irregulares.
2	Calcular o comprimento de lados de polígonos, sabendo o perímetro.		
3	Resolver um problema usando a fórmula do perímetro do círculo.	Perímetros: círculo	Resolver problemas envolvendo perímetros de polígonos e do círculo.
4.1	Desenhar figura equivalente com menor perímetro.	Áreas: equivalência de figuras planas	Compreender a noção de equivalência de figuras planas.
5	Reconhecer e identificar figuras congruentes		Distinguir figuras equivalentes de figuras congruentes.
6	Calcular a área de um polígono.	Áreas: área do triângulo e do círculo	Calcular a área de figuras planas simples.
7	Calcular a área do círculo.		
8	Calcular a área de ima figura por decomposição.	Áreas	Calcular a área de figuras decomponíveis em retângulos e em triângulos.
9	Calcular o perímetro a partir da área.	Áreas	Resolver problemas que envolvam áreas.

Anexo 17

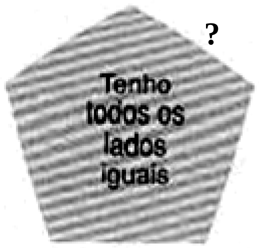
Teste Final

1 – Determina o perímetro da figura.



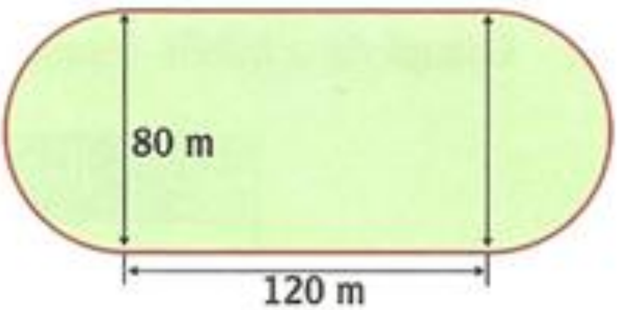
2 – O perímetro de cada uma das figuras seguintes é 30 m. Calcula o comprimento do lado desconhecido, em cada uma das figuras.

a)

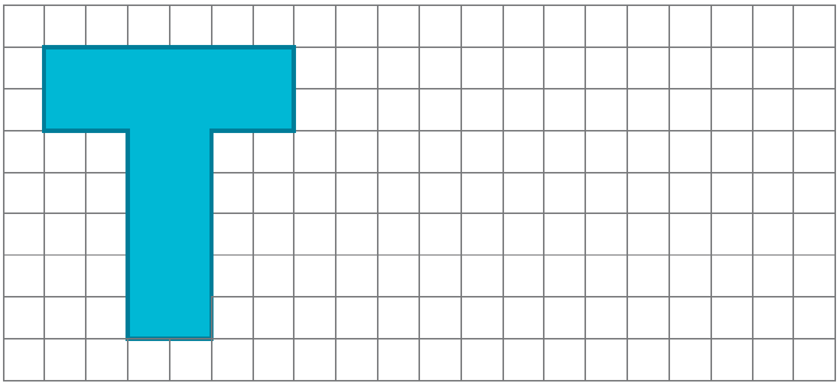


b)

3 – Quantos metros de rede serão necessários para vedar o campo representado na figura.

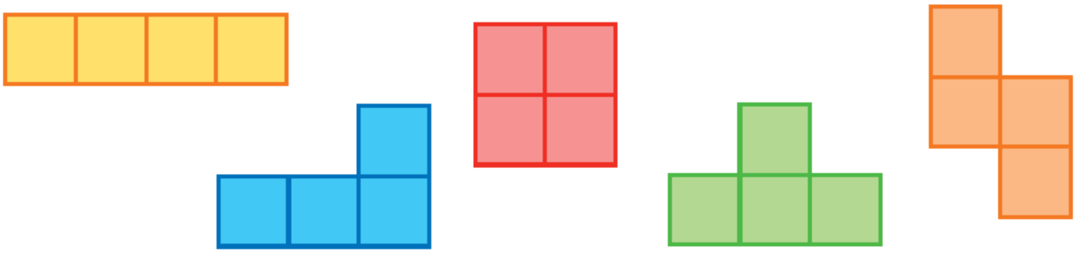


4 – Observa a seguinte figura.



4.1 – Desenha uma figura equivalente à dada mas com maior perímetro.

5 – Na aula de Matemática, o Rui e o Tiago estavam a construir figuras com os tetraminós.



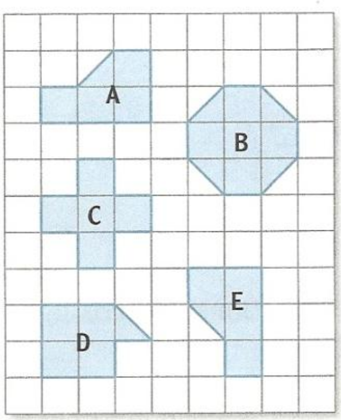
Observando os tetraminós:

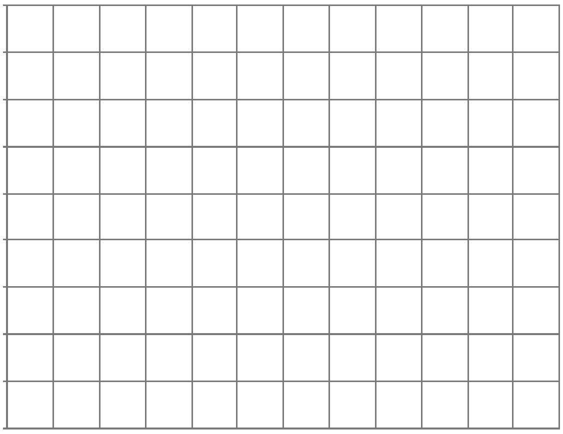
- o Rui afirmou: “As figuras são equivalentes.”;

- o Tiago acrescentou: “Pois, têm todas o mesmo perímetro.”.

Terão ambos razão? Justifica.

6 – Observa as figuras:



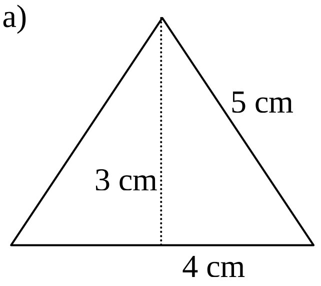


6.1 – Indica um par de figuras congruentes.

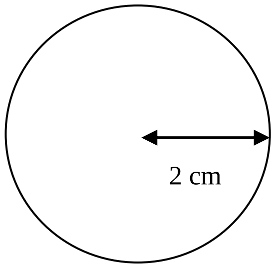
6.2 – Desenha, no quadriculado uma figura congruente à figura D.

7 – Calcula a área das figuras seguintes:

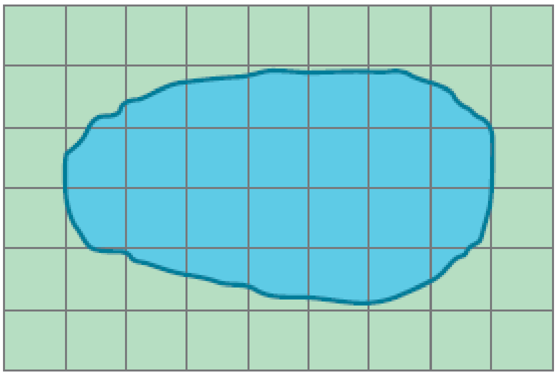
a)



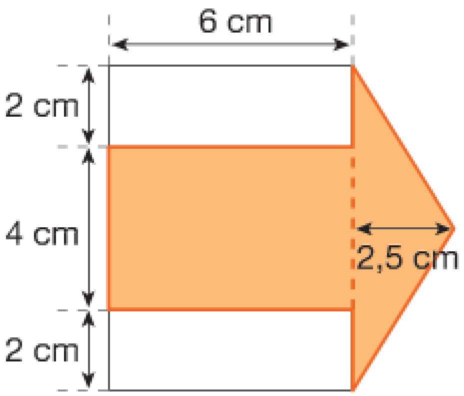
b)



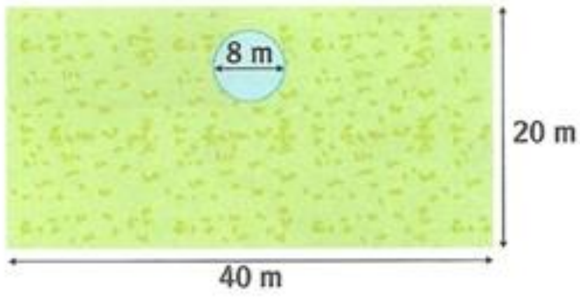
8 – A figura representa o lago que a gerência de um hotel pretende construir no parque de estacionamento desse hotel. Estima a área do lago, sabendo que cada quadrícula representa $1m^2$.



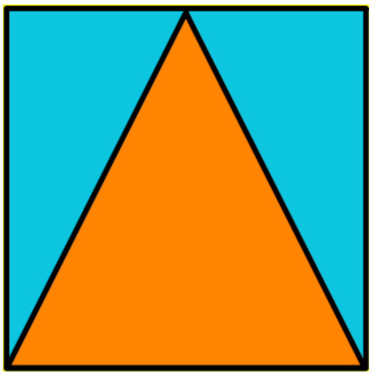
9 – Calcula a área da seta representada na figura.



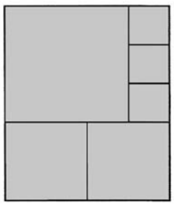
10 – A Mariana tem no seu jardim, como o que está representado na figura, uma zona relvada e uma piscina circular. Qual a área da zona relvada?



11 – Sabendo que a área do quadrado representado na figura é 16 cm^2, determina a área do triângulo.



12 – A figura seguinte está dividida em 6 quadrados.



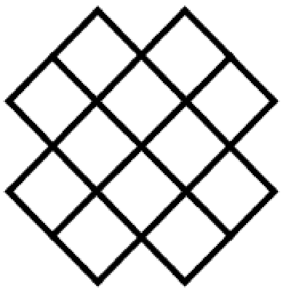
Considera como unidade de medida a área do quadrado mais pequeno.

Assinala com X a medida da área da figura.

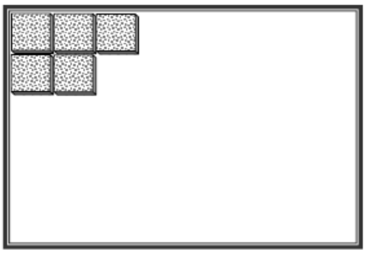
6 ☐ 16 ☐ 20 ☐ 25 ☐

(Prova de Aferição de 2005)

13 – O lado que cada quadradinho mede 7 mm. Calcula o perímetro da figura, em milímetros. *(Exame de 2012 - 2ª chamada)*



14 – O António está a colocar fatias de pão num tabuleiro, em filas, como mostra a figura seguinte.



O interior do tabuleiro é um retângulo com 42 cm de comprimento e 33 cm de largura. As fatias são todas do mesmo tamanho e a sua base tem a forma de um quadrado com 5 cm de lado. No final, todas as filas vão ter o mesmo número de fatias inteiras.

Qual o número máximo de fatias inteiras de pão que o António vai conseguir colocar no tabuleiro, sem as sobrepor?

(Prova de aferição de 2010)

Anexo 18

Matriz do Teste Final

Questão	Tópico	Objetivos	Objetivos do PMEB
1	Perímetros: polígonos regulares e irregulares	Calcular o perímetro de polígonos.	Determinar o perímetro de polígonos.
2 a)		Calcular o comprimento de lados de polígonos, sabendo o perímetro.	
2 b)			
3	Perímetros: círculo	Identificar e calcular a medida do perímetro.	Resolver problemas envolvendo perímetros de polígonos e do círculo.
4.1		Compreender o conceito de perímetro.	
7 a)	Áreas: Área do triângulo e do círculo	Calcular a área de figuras.	Calcular a área de figuras planas simples, decomponíveis em retângulos e em triângulos ou por meio de estimativas.
7 b)			
8			
9			
10			
11	Áreas	Relacionar a área do triângulo com a do retângulo.	Resolver problemas que envolvam áreas.
12		Compreender o conceito de área.	
14			
5	Áreas: Equivalência de figuras planas	Reconhecer figuras equivalentes.	Compreender a noção de equivalência de figuras planas e distinguir figuras equivalentes de figuras congruentes.
6.1		Identificar figuras congruentes.	
6.2		Desenhar figuras congruentes.	

Anexo 19

Guião - Diário de Bordo

Aula:

Data:

Tarefas:

Tempo previsto/Tempo gasto:

Antes da aula
Expetativas do professor

Durante a aula
Introdução da tarefa
Instruções
Reações dos alunos
Desenvolvimento da tarefa
Atitudes do professor / Questões colocadas / Reações obtidas
Questões específicas colocadas pelos alunos
Dificuldades e comentários dos alunos

Atitudes dos alunos no desenvolvimento da tarefa / Estratégias utilizadas
Discussão geral
Intervenções dos alunos / Gestão do professor
Principais conclusões / Aspetos novos
O que se salientou relativamente aos alunos entrevistados neste estudo
Outros aspetos a destacar / Episódios marcantes decorridos na sala de aula

Após a aula
Aspetos bem conseguidos
Aspetos que podem ser melhorados (nas tarefas, na prática do professor)
Papel do professor / investigador
Reflexos na investigação

Outras observações

Anexo 20

Análise dos Testes

Diagnóstico		Teste final			
Questão	% de sucesso	Questão	% de sucesso	Objetivos específicos	Objetivos do PMEB
1 a)	**11**	1	**30**	Calcular o perímetro de polígonos regulares e irregulares.	Determinar o perímetro de polígonos.
1 b)	**15**	13	**37**		
1 c)	**48**	-	**-**		
2	**22**	-	**-**		
-	**-**	2 a)	**56**	Calcular o comprimento de lados de polígonos sabendo o perímetro.	
-	**-**	2 b)	**44**		
3	**44**	3	**11**	Identificar a calcular a medida do perímetro.	Resolver problemas envolvendo perímetros.
6	**19**	4.1	**11**	Compreender o conceito de perímetro.	
4 a)	**26**	8	**56**	Calcular a área de figuras.	Calcular a área de figuras planas simples, decomponíveis em retângulos e em triângulos.
4 b)	**22**				
5	**15**	7 a)	**19**		
		7 b)	**37**		
-	**-**	9	**11**		
		10	**7,5**		
7	**52**	12	**56**	Compreender o conceito de área.	Resolver problemas que envolvam áreas.
-	**-**	14	**22**		
-	**-**	11	**22**	Relacionar a área do triângulo com a do retângulo.	
8	**30**	-	**-**	Distinguir área de perímetro.	-
9	**11**	5	**44**	Reconhecer figuras equivalentes.	Compreender a noção de equivalência de figuras planas e distinguir figuras equivalentes de figuras congruentes.
-----	-----	6.1	**30**	Identificar figuras congruentes.	
-----	-----	6.2	**52**	Desenhar figuras congruentes.	